This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

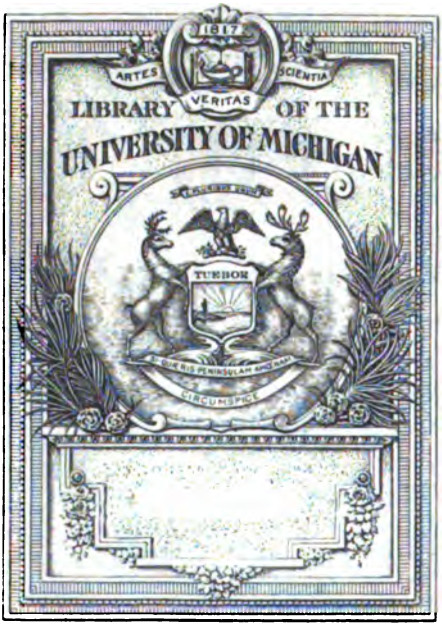
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
35
.M385

ALGEBRÆ
GEOMETRIA PROMOTÆ
ELEMENTA

Conſcripta ad uſum

FAUSTINÆ
PIGNATELLI

Principis Colubranenſis, & Tolvenſis Ducatus Hæredis.

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

Regio Mathematum Profeſſore

TOM. I.

BIBLIOTECA RICCARDI
IN MODENA
S. IX F. 7 N. 55.

Excudebat Felix Carolus Moſca ſumptibus CAJETANI ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI
MDCCXXXVII.

Lib. Com.
Magliome
2-10-28.
16615
3 v.

REGIÆ SCIENTIARUM ACADEMIÆ PARISIENSIS SOCIIS PRÆSTANTISSIMIS

NICOLAUS DE MARTINO

F. P.

Quod mea hæc Algebræ Elementa, quæ ſeptem ab hinc annis in uſum Excellentiſſimæ Principis FAUSTINÆ PIGNATELLI conſcribere curavi, veſtro nunc nomine exornata, in lucem emittam; non deerunt, VIRI PRÆSTANTISSIMI, qui audacem nimis me judicabunt, nec tanto molimine ſatis mihi ipſi conſuluiſſe, in Vulgus efferent. Facile enim in animum inducent

ſuum ; aliiſque imponent , quod, ad id audendum , duorum alterutro fuerim adductus ; vel quod adeo de me ſentiam , ut non dubitem , quin mei labores Viris tam probatæ doctrinæ poſſent offerri; vel quod Vos ipſos adeo parvi faciam , ut omni qualicunque labore , qui Vobis offeratur, contentos Vos eſſe debere , mihi perſuadeam . Sane non vereor , quin nemo Veſtrum hanc in me notam ſit injecturus. Nam, ut æqui rerum æſtimatores , non aliter id , quod molior , eritis accepturi , quam ab eo fiat oportet , qui ſuarum virium eſt probe conſcius , nec ipſum latet , quem locum in Orbe litterario , communi omnium ſuffragio , teneatis . Sed ab aliis , qui eam mihi notam inurere, Vulguſque hominum , non ſatis cautum, decipere poſſent , cavendum mihi eſt. Neque enim omnes eo pollent animi candore , ut ea , qua decet , ratione hominum conſilia interpretentur . Potiſſimum vero id vitii viget apud eos , qui ſpecie tenus litteras colunt : quo fit , ut , maximo ipſarum detrimento, exitioſæ humanæ Societati vulgo litteræ habeantur. Quod igitur, VIRI PRÆSTANTISSIMI, potiſſimum me movit , ut hoc meum qualecumque Opus Vobis dicarem , eſt, ut ad fontem ſuum rediret quidquid eximii , ac ſingularis in eo continetur . Maximam namque partem optimarum re-

rum,

rum, quæ ibidem occurrunt, non aliunde equidem ſum mutuatus, quam ex veſtris Commentariis, quos continuo ante oculos habui. Et, ſi aliquod forte argumentum ultra veſtra pomæria videar protuliſſe, id quoque Vobis ipſis ferri debet acceptum; quum, nonniſi præeunte veſtra face, licuerit mihi paulo longius progredi. Accedit, quod mihi, qui in hac Urbe perpetuo ſum commoratus, non aliter quidem contingit, ut tum ſublimioris Geometriæ receſſus, cum arcana Phyſices ſanioris permeare valuerim, quam ope veſtrorum Commentariorum, qui fato quodam ſingulari citius, quam par erat, ad meas manus pervenerunt. Analyſim quippe Indefinite Parvorum Clariſſimi HOSPITALII penitius intelligere licuit; quia cuncta loca ardua, ac difficilia, quæ in ea perluſtranda nonnihil negotii Tironibus faceſſunt, dilucidationibus veſtris plana, & aperta ſeſe mihi præbuerunt. Et admirandum illud Opus Principiorum Philoſophiæ Naturalis Incomparabilis NEVVTONI fas fuit inoffenſo pede peragrare; quia præcipua ejus Operis Capita in veſtris Commentariis, non modo enucleata, ſed omnibus ſuis numeris perfecta, abſolutaque leguntur. Æquum eſt igitur, VIRI PRÆSTANTISSIMI, ut Illuſtri veſtræ Societati acceptum feram quidquid profecerim, ſi-

ve in Phyſicis , ſive in Geometricis diſciplinis . Atque hoc ex capite , ſicuti non eſt mihi vitio vertendum , quod mea hæc Algebræ Elementa ſub veſtris auſpiciis in lucem proferam ; ita audacter ſe ſpes inſinuat , ut Voſmet ipſi ab invidiæ morſibus ea pro viribus vindicare velitis . Neque vero culpæ mihi debet adſcribi, quod obſignatis hiſce tabulis nunc demum cunctis teſtatum faciam , quo vinculo ſim Vobis obſtrictus , & quantum veſtris laboribus debeam . Non enim id antea præſtiti ; quia obſtitit ingenuus ille pudor , quem a prima ætate eximia veſtra doctrina ſenſim in animum miſit . Nunc autem , mutato conſilio , malui pudoris limites præterire , quam ingrati animi crimen incurrere . Et quamquam ultro fatear , nimis tenue eſſe id, quod Vobis exhibeo ; non vereor tamen, quin ea ſit veſtra humanitas , ut , non tam quid Vobis debeatur , quam quid vires poſſint aliorum , inſpicere velitis . Futurum autem , ut meus hic labor non omnino ſit Vobis diſcipliturus , ſuadet ; tum Operis argumentum , quo nihil ſublimius excogitari poteſt ; tum ipſa de hoc argumento diſſerendi ratio, qua omnem ex eo caliginem , ac ſterilitatem diſcutere curavi . Ubi vero ad Excellentiſſimam eam Prnicipem animum converto , in cujus uſum hæc mea Al-

ge-

gebræ Elementa conſcripta fuerunt, ſpes optima fovet, ut omnem apud Vos gratiam ſint acceptura. Adeo enim fama percrebuit de ſingulari, quo omne litterarum genus perſequitur, ſtudio, ut jam Exteris excitamento ſit, quo Regiam hanc Urbem inviſerent. Sed nomen, quod fama ſuſtinet, augeri in ſe ipſis non parum ſentiunt, qui familiari ſuo colloquio detinentur. Mens namque Geometrica in omni ejus ſermone, vel etiam jocoſo, detegitur; & de quacumque re verba faciat, adeo ſubtiliter, & acute illam evoluit, ut nihil ſit, quod in ea expeti queat. Senſa autem animi ſui eo verborum delectu, ac proprietate depromit, ut eos, qui audiunt, quocumque vellet, poſſet impellere. Quod vero plane ſuperat fidem, eſt, quod & facile ad aliorum ſermones ſe accomodat, & cuique pro ingenio ſuo loquendi ſuppetit argumentum: ex quo fit, ut nemo ipſius non ambiat neceſſitudinem, nemo familiaritate ſua non recreetur. Opus igitur, pro tanta PRINCIPE elucubratum, non eſt mihi pertimeſcendum, quin æquo, libentique animo eritis accepturi. Unde non aliud ſupereſt, quam ut vota mea fundam, quo Veſtra Societas pro bono Scientiarum cum ipſo terrarum Orbe ſit duratura.

AD

AD LECTOREM.

Duodecim fere effluxerunt anni, ex quo libri duo priores noſtrorum Algebræ Elementorum, tumultuario ſtudio conſcripti, lucem adſpexerunt. Eoſdem nonnihil adauctos, & in concinniorem formam redactos, una cum duobus libris poſtremis, nunc iterum tibi ſiſtimus, Benevole Lector. *Propoſitum eſt autem nobis in biſce Elementis Algebram univerſam comprehendere: quem in finem, non modo eam ipſius partem enodare aggreſſi ſumus, quæ propriis ſuis limitibus continetur; ſed illam quoque adjicere curavimus, quæ per latiſſimos Geometriæ campos ſpatiatur. Præfixum vero nobis ſcopum non melius indicari poſſe putavimus, quam Opus inſcribendo:* Algebræ Geometria promotæ Elementa. *Etſi enim conſortio harum diſciplinarum utraque ad majorem amplitudinem evehatur; attamen, quod in hoc Opere potiſſimum nobis propoſuimus, eſt, ut Algebræ defectibus per Geometriæ vires occurramus. Et priores quidem duo libri, quum alter ſit de calculo litterali, ſeu ſpecioſo, alter de ſpecioſa problematum reſolutione, Algebram in ſe ipſa conſideratam complectuntur. Duo vero libri poſteriores, quum unus de compoſitione locorum geometricorum ediſſerat, alter de geometrica æquationum conſtructione pertractet, qua ratione Geometriæ ſubſidio eadem diſciplina majora ſubeat incrementa, in propatulo ponit. Singula autem horum librorum argumenta paulo latius proſecuti ſumus, quam Elementorum patitur ratio. Id vero nolim,* Benevole Lector, *nobis vitio vertas.*

Nam

Nam diſciplinæ hujus Elementa ita quidem conſcribere curavimus, ut Tironum captui eſſent accomodata, & doctis etiam uſui eſſe poſſent. Itaque, quum eo quidem ordine cuncta a nobis digeſta ſint, ut poſteriora ex prioribus prono alveo fluant; nihil metuendum eſt, quod Tironum animos a ſtudio hujus diſciplinæ avertere poſſit. Quum vero nihil a nobis ſit omiſſum, quod ad eandem diſciplinam pertinere videatur; ſpes optima fovet, futuram, ut noſtrum Opus doctioribus etiam non improbetur. Neque enim omnia diſciplinæ hujus theoremata ita ſemper præ manibus haberi poſſunt, ut praſto ſint nobis, quum iis eſt opus. Quare optandum erat, ut quæ apud varios Auctores hinc inde ſparſa reperiuntur, in unum corpus ſubinde collecta haberentur, ut eſſent iiſdem principiis innixa, eodemque ordine pertractata. In priore igitur libro, in quo de calculo litterali, ſeu ſpecioſo diſſeritur, non modo ea complexi ſumus, quæ de hujuſmodi calculo vulgo Algebriſtæ in ſuis Elementis tradere conſueverunt; ſed alia quamplura congeſſimus, quibus longe ultra in hac ſcientia progredi licet. Eum namque diſtribuimus in quatuor ſectiones, quarum prior eſt de calculo quantitatum rationalium, altera de calculo quantitatum radicalium, tertia de calculo ſerierum infinitarum, & quarta demum de generali poteſtatum theoria. Unde priores duæ ejus ſectiones a nobis ſiſtunt, quæ vulgaria ſunt, & a cunctis in ſuis Algebræ Inſtitutionibus tradita; aliæ vero duæ ſectiones poſtremæ argumentum continent paulo ſublimius, quod a ſcientia hujus Elementis alienum fortaſſe nonnulli judicabunt. Secundus porro liber quatuor etiam ſectiones complectitur; unam nempe

de

de reſolutione problematum per analyſim; alteram de natura, & proprietatibus æquationum; tertiam de reductione æquationum ad propriam ſedem; & quartam demum de reſolutione æquationum irreducibilium. Quamquam vero ſingula hæc capita communia ſint, & ab omnibus fere pertractata; audacter tamen aſſerere non verebimur, ea in noſtris hiſce Elementis, non modo paulo accuratius expenſa, ſed novis etiam acceſſionibus locupletata reperiri. Omnium autem uberior eſt liber tertius, in quo de compoſitione locorum geometricorum agendum nobis propoſuimus. Etſi enim nemo non noverit, loca geometrica multiplicis generis eſſe; attamen, qui de iis componendis conſcripſerunt, non alia loca ſunt proſecuti, quam quæ ad priora duo genera referuntur. Quum igitur theoria iſta, maximi alioquin uſus, non ſatis abunde, nec ea, qua par erat, ratione ab aliis fuerit explicata; eam omnibus ſuis numeris perfectam, abſolutamque tradere aggreſſi ſumus. Quem in finem, non modo de locis diſſeruimus, tam primi, quam ſecundi generis, quæ quum frequentius occurrant; æquum erat, ut ſeorſim de iis ageretur; verum etiam conati ſumus generaliter oſtendere, qua ratione, tum loca cujuſque generis a ſe invicem diſtingui, cum linearum loca illa terminantium proprietates poſſent definiri: cujus deinde generalis theoriæ placuit exemplum exhibere ſpeciale in lineis ordinis tertii, quibus loca tertii generis terminantur, quaſque primus omnium Nevvtonus enumerare ſuſcepit. Itaque librum tertium noſtrorum Algebræ Elementorum in quatuor pariter ſectiones diſtribuimus; & in prima quidem egimus de natura linearum, quæ ſunt termini locorum primi, & ſecundi generis;

in

in ſecunda methodum aperuimus, qua eorundem locorum compoſitio perficitur; in tertia generalem cujuſcumque ordinis linearum theoriam complexi ſumus; & in quarta demum ſpecialem theoriæ hujus uſum exhibuimus, contemplatione earum linearum, quæ tertium ordinem conſtituunt. Ea autem, quam nobis præſcripſimus, diſſerendi ratione, non aliæ curvæ ſpeciatim contemplandas ſeſe nobis obtulerunt, quam conicæ Veterum ſectiones ejuſdem cum circulo gradus, & lineæ tertii ordinis Newtonianæ. Unde, ne noſtris hiſce Elementis aliquid deeſſet, quod ſcitu dignum videretur; operæ pretium duximus, quatuor iis ſectionibus Appendicem ſubnectere, in qua omnes curvas, quæ ſuis ſaltem nominibus apud Geometras celebrantur, ea, qua fieri potuit, brevitate perluſtravimus. Hinc vero factum, ut libri tertii moles uſque adeo creverit, ut, quum unico volumine contineri non poſſet, omnino oportuerit, duobus eum tomis comprehendere. Denique liber quartus, in quo de geometrica æquationum conſtructione diſſeritur, longe etiam plura complectitur, quam quæ ab aliis, qui de eodem argumento pertractarunt, congeſta fuere. Eum namque perinde, ac quemlibet præcedentium, in quatuor ſectiones partiti ſumus. In prima autem, jactis generalioribus theoriæ hujus fundamentis, egimus de conſtructione earum æquationum, quæ ſecundum gradum non excedunt; in ſecunda vero conſtructionem exhibuimus æquationum, quæ ſive ad tertium, ſive ad quartum gradum aſſurgant; in tertia porro gradum fecimus ad conſtructionem æquationum, quæ ſunt quinti, aut ulterioris gradus; & in quarta demum, quo pacto qualibet æquatio conſtrui poſſit per lineam, quæ

ſit

ſit ejuſdem cum ea ordinis, aperuimus. Quamquam vero iſtiuſmodi conſtructiones non alia ratione in Algebra tradi ſoleant, quam ut per rectarum longitudines exhibeantur radices earum ſaltem æquationum, quæ algebraice reſolvi nequeunt; attamen, quum problemata, unde æquationes proficiſcuntur, ſunt geometrica, ipſa problematum natura exigit, ut ad eas recurramus. Verum, pro iis adminiſtrandis, majore quadam ſolertia opus eſt. Neque enim in elegantes illas Veterum Geometrarum conſtructiones incidere liceret, ſi æquationes, ex reſolutione problematum ortæ, eo quidem artificio conſtruerentur, quo paſſim utuntur Algebriſtæ. Quare non abs re fore putavimus, ſelectiora quædam problemata geometrica ad calcem cujuſcumque ſectionis ſubnectere, ut eorum ope compertum fieret, ac exploratum, qua ratione conſtruendæ ſint æquationes problematum geometricorum, quo eam præſeferant elegantiam, quæ in conſtructionibus Veterum eluceſcit. Habes ergo, Benevole Lector, *tuum ſcopum, quem in conſcribendis hiſce Elementis nobis propoſuimus, cum præcipua capita, quæ in iis pertractavimus. Quod vero attinet ad noſtram de hac diſciplina diſſerendi rationem, hæc paucis accipe. Primo uſque adeo claritati ſtuduimus, omnemque ex ea caliginem, & obſcuritatem delere conati ſumus, ut audacter ſe ſpes inſinuet, futuram, ut hujuſmodi diſciplina, quæ hactenus inter abſtruſiores adſcripta fuit, omnium captui accomodata videretur. Deinde, etſi ea analyſis a nobis tradenda eſſet, quæ calculo utitur, ſingulas tamen rerum theorias, non tam calculi fato committere, quam ex propriis ſuis principiis eruere curavimus. Ac denique dedimus*

ope-

operam, ut qui noſtra hæc Elementa attente perluſtrarent, non modo eam, quam continent, ſcientiam, ſed ſcientiæ ejus Metaphyſicam, ut ita dicam, ediſcerent. Id vero poſtremum, ſi præſtitum ſit a nobis, non alteri ferri debet acceptum, quam Excellentiſſimæ ei Principi, *in cujus uſum hæc Algebræ Elementa fuerunt elaborata. Quum enim eam mentis aciem a natura ſortita ſit, ut in unoquoque rerum genere tunc demum acquieſcat, ubi intimiores earum receſſus pervaſerit, primaſq; ipſarum origines fuerit aſſecuta; ut illi mos gereretur, non aliter, quam metaphyſice, tradenda ei erat hujuſmodi diſciplina. Et ſane, ut mens altius aſſurgere, & ad primitivas rerum notiones aſcendere aſſueſcat, nihil utilius Algebræ ſtudio. In eo enim diſciplina iſthæc cæteris præſtat, quod iis, quas contemplatur, ideis omnẽ, quam ſubire queunt, univerſalitatem citra erroris periculum facile poteſt elargiri. Ubi autem in aliquo argumento ſupremum, ut ita dicam, genus eſt aſſecuta, ſuperat profecto fidem, qua quidem ſolertia ad ultimas ejus differentias progrediatur. Optandum itaque eſſet, ut quilibet diſciplinæ huic addiſcendæ ſedulo operam navaret; ut quæ mentis capacitatem mirum in modum adauget, neque adeo arctos eſſe limites noſtræ mentis, ut vulgo creditur, luculenter oſtendit. Interim, neſcio quo fato, ea apud homines, etiam eruditos, irrepſit opinio, nihil ſterilius Algebræ ſtudio: quo fit, ut qui fama cæteris præſtant, tantum abeſt, ut ad id ſtudii Adoleſcentium animos alliciant, quin potius ab eo illos avertant. In hanc vero ſententiam eo facilius abiere, quod viderint, præclara diſciplinæ hujus theoremata vix aliter, quam calculo, ut Vulgo Algebriſtarum comprobari: unde*

de reſolutione problematum per analyſim; alteram de natura, & proprietatibus æquationum; tertiam de reductione æquationum ad propriam ſedem; & quartam demum de reſolutione æquationum irreducibilium. Quamquam vero ſingula hæc capita communia ſint, & ab omnibus fere pertractata; audacter tamen aſserere non verebimur, ea in noſtris hiſce Elementis, non modo paulo accuratius expenſa, ſed novis etiam acceſſionibus locupletata reperiri. Omnium autem uberior eſt liber tertius, in quo de compoſitione locorum geometricorum agendum nobis propoſuimus. Etſi enim nemo non noverit, loca geometrica multiplicis generis eſse; attamen, qui de iis componendis conſcripſerunt, non alia loca ſunt proſecuti, quam quæ ad priora duo genera referuntur. Quum igitur theoria iſta, maximi alioquin uſus, non ſatis abunde, nec ea, qua par erat, ratione ab aliis fuerit explicata; eam omnibus ſuis numeris perfectam, abſolutamque tradere aggreſſi ſumus. Quem in finem, non modo de locis diſseruimus, tam primi, quam ſecundi generis, quæ quum frequentius occurrant, æquum erat, ut ſeorſim de iis ageretur; verum etiam conati ſumus generaliter oſtendere, qua ratione, tum loca cujuſque generis a ſe invicem diſtingui, cum linearum loca illa terminantium proprietates poſsent definiri: cujus deinde generalis theoriæ placuit exemplum exhibere ſpeciale in lineis ordinis tertii, quibus loca tertii generis terminantur, quaſque primus omnium Nevvtonus enumerare ſuſcepit. Itaque librum tertium noſtrorum Algebræ Elementorum in quatuor pariter ſectiones diſtribuimus; & in prima quidem egimus de natura linearum, quæ ſunt termini locorum primi, & ſecundi generis;

in

in ſecunda methodum aperuimus, qua eorundem locorum compoſitio perficitur; in tertia generalem cujuſcumque ordinis linearum theoriam complexi ſumus; & in quarta demum ſpecialem theoriæ hujus uſum exhibuimus, contemplatione earum linearum, quæ tertium ordinem conſtituunt. Ea autem, quam nobis præſcripſimus, diſſerendi ratione, non aliæ curvæ ſpeciatim contemplandas ſeſe nobis obtulerant, quam conicæ Veterum ſectiones ejuſdem cum circulo gradus, & lineæ tertii ordinis Nevvtonianæ. Unde, ne noſtris hiſce Elementis aliquid deeſſet, quod ſcitu dignum videretur; operæ pretium duximus, quatuor iis ſectionibus Appendicem ſubnectere, in qua omnes curvas, quæ ſuis ſaltem nominibus apud Geometras celebrantur, ea, qua fieri potuit, brevitate perluſtravimus. Hinc vero factum, ut libri tertii moles uſque adeo creverit, ut, quum unico volumine contineri non poſſet, omnino oportuerit, duobus eum tomis comprehendere. Denique liber quartus, in quo de geometrica æquationum conſtructione diſſeritur, longe etiam plura complectitur, quam quæ ab aliis, qui de eodem argumento pertractarunt, congeſta fuere. Eum namque perinde, ac quemlibet præcedentium, in quatuor ſectiones partiti ſumus. In prima autem, jactis generalioribus theoriæ hujus fundamentis, egimus de conſtructione earum æquationum, quæ ſecundum gradum non excedunt; in ſecunda vero conſtructionem exhibuimus æquationum, quæ ſive ad tertium, ſive ad quartum gradum aſſurgant; in tertia porro gradum fecimus ad conſtructionem æquationum, quæ ſunt quinti, aut ulterioris gradus; & in quarta demum, quo pacto qualibet æquatio conſtrui poſſit per lineam, quæ

ſit

ſit ejuſdem cum ea ordinis, aperuimus. Quamquam vero iſtiuſmodi conſtructiones non alia ratione in Algebra tradi ſoleant, quam ut per rectarum longitudines exhibeantur radices earum ſaltem æquationum, quæ algebraice reſolvi nequeunt; attamen, quum problemata, unde æquationes proficiſcuntur, ſunt geometrica, ipſa problematum natura exigit, ut ad eas recurramus. Verum, pro iis adminiſtrandis, majore quadam ſolertia opus eſt. Neque enim in elegantes illas Veterum Geometrarum conſtructiones incidere liceret, ſi æquationes, ex reſolutione problematum ortæ, eo quidem artificio conſtruerentur, quo paſſim utuntur Algebriſtæ. Quare non abs re fore putavimus, ſelectiora quædam problemata geometrica ad calcem cujuſcumque ſectionis ſubnectere, ut eorum ope compertum fieret, ac exploratum, qua ratione conſtruendæ ſint æquationes problematum geometricorum, quo eam præſeferant elegantiam, quæ in conſtructionibus Veterum eluceſcit. Habes ergo, Benevole Lector, *tum ſcopum, quem in conſcribendis hiſce Elementis nobis propoſuimus, cum præcipua capita, quæ in iis pertractavimus. Quod vero attinet ad noſtram de hac diſciplina diſſerendi rationem, hæc paucis accipe. Primo uſque adeo claritati ſtuduimus, omnemque ex ea caliginem, & obſcuritatem delere conati ſumus, ut audacter ſe ſpes inſinuet, futuram, ut hujuſmodi diſciplina, quæ hactenus inter abſtruſiores adſcripta fuit, omnium captui accomodata videretur. Deinde, etſi ea analyſis a nobis tradenda eſſet, quæ calculo utitur, ſingulas tamen rerum theorias, non tam calculi fato committere, quam ex propriis ſuis principiis eruere curavimus. Ac denique dedimus*

ope-

ſe comparari; utique ei ferri poſſunt accepta cuncta illa commoda, quæ in vita activa ex diſciplinis omnibus nobis derivantur. Aut igitur neceſſe eſt, ut nullus ſit ſcientiarum uſus in actionibus noſtris obeundis, quod nemo dixerit, cui ſanum eſt cerebrum; aut, ſi in iis peragendis aliquos nobis ſuppetunt fructus, quos ſane uberrimos largiuntur, maxime in Algebram, quæ eſt fons, & origo ſcientiarum omnium, eos rejicere neceſſe eſt. Interim, etſi hæc in ſe ſpectata veriſſima ſint, urgent tamen exempla, quæ contrarium nobis oſtendunt. Qui enim Algebram profitentur, tanta mentis alienatione ut plurimum laborant, ut nec ad aliorum ſermones animum intendere, nec ſenſa ſua eloqui valeant; verborum ſunt adeo frugales, ac inopes, ut vix aliis, quam monoſyllabis vocibus, ſermones ſuos abſolvant; denique vitam ſuam ſubinde tranſigere videntur, ac ſi in hac ſocietate non eſſent, nec humana negotia ad eos pertinerent. Sed ſubeunt hæc incommoda qui Algebram profitentur, hoc eſt, qui in diuturno Algebræ ſtudio omnem fere vitam impendunt. Id vero nihil nos movere debet. Neque enim novum eſt, ut qui alicui diſciplinæ excolendæ omnem operam navant, amore ejus ſubinde rapiantur, ut diſciplinas alias negligant, nec expleant officia, quibus humana ſocietas continetur. Et, ſicuti id ultro eis ignoſcitur, quia cultura ejus diſciplinæ humanæ conferunt ſocietati; ita culpa non vacant, qui eam ob cauſam ejuſdem diſciplinæ ſtudium carpunt. Verum iiſdem incommodis minime ſubjacent ii, qui diſciplinis addiſcendis eo conſilio animum admovent, ut ſuam excolerent rationem, & ea, qua decet, ratione in hac ſocietate ſe gererent. Quum enim non ea illorum

de, non tam excolendæ rationi, quam ei peſſundandæ, inſervire Algebram collegerunt. Neque enim mens noſtra colitur, ac perficitur multitudine veritatum, quibus imbuitur; ſed ubi vis ratiocinandi, quam a natura ſortita eſt, alitur, atque fovetur. Quare, ſicuti non aliæ diſciplinæ in pretio habendæ ſunt, quam quæ menti noſtræ ſuppetunt argumentum, in quo ratiocinativa ejus facultas ſpatiatur; ita Algebræ ſtudium, non modo vanum, ac inutile, ſed exitioſum omnino judicarunt: ea decepti ratione, quod fatali calculo omnes, quas docet, veritates obtrudere nobis videatur. Verum, quod vitio evenit eorum, qui de præclara hac diſciplina diſſeruerunt, æquitas non patitur, ut in ipſam rejiciatur. Plane enim, ſi cæco calculi duce dumtaxat in ea progredi liceret, eliminanda quidem eſſet ab albo ſcientiarum, ejuſque ſtudium omnino foret improbandum. Sed id tantum a vero abeſt, quam quod longiſſime; nihilque magis vulgatum errorem refellere valet, quam maximum illud incrementum, quod laboribus Virorum illuſtrium poſtremis hiſce temporibus ſubire viſa eſt. Neque enim ad univerſales illas rerum, de quibus ediſſerunt, theorias pervenire potuiſſent, niſi præeunte ratione calculum adminiſtraſſent. Eſt itaque calculus diſciplinæ hujus velut inſtrumentum, quod tamen non alius Artifex, quam ratio, moderatur, atque gubernat. Et quamquam illi iidem Viri inſignes, de hac ſcientia optime meriti, inventa ſua ſubinde utplurimum evulgare viſi ſint, ut in iis magis vis calculi, quam ratio, eluceſcat; id tamen factum ab illis arbitramur, vel ut majorem ſibi captarent gloriam, committendo latebris artificium, quo eas inveſtigarunt veritates, vel ut aliorum

exer-

exercerent ingenia; propriæ eorum induſtriæ detegendam artem relinquendo, qua veritates illas ſunt aſſecuti. Quæcumque autem ſit cauſa, quæ in inventis ſuis evulgandis ad id conſilii eos adegerit, proculdubio reprehenſione non vacant. Nam, ſicuti ad veritatem inveniendam, non gloria, ac vanitate, ſed ſuapte natura feramur oportet; ita quidquid in hac diſciplina detegitur, id quidem non parce, ac frugaliter, ſed plene, luculenterque, æquum eſt, ut aliis aperiatur. Eſt quippe diſciplinæ hujus adeo latum argumentum, ut quicumque in eo labores impendantur, fieri plane nequit, ut omnino illud exhauriatur: unde, ſicuti numquam aliis materies eſt defutura, in qua ſuas poſſint vires exercere; ita omnia eis præſidia oportet ſubminiſtrentur, quo longius in hac ſcientia progredi valeant. Hujuſmodi conſilio, LECTOR BENEVOLE, *noſtra iſthæc Algebræ Elementa conſcribere curavimus. Nam, non modo ſingula capita, de quibus diſſeruimus, adeo clare, ac perſpicue ſumus proſecuti, ut nihil jam ſubeſſe videatur, quod negotium aliquod Tironibus faceſſere poſſit; verum etiam conati ſumus, hujuſmodi principiis eorundem animos imbuere, quæ fœcundiſſima eſſent, & quorum ope nihil in hac diſciplina non poſſent audere. Itaque vetus illa querela, quod, Algebræ ſtudio, non modo ratio non excolitur, ſed obtunditur, atque ſopitur, facile conjicimus, quod iniqua nimis viſura ſit iis, qui noſtra hæc Elementa perluſtrabunt. Intelligent enim, præclaras diſciplinæ hujus theorias non eſſe meras calculi productiones, ut paſſim objicitur; ſed ex claris, indubitatiſque principiis adeo acute, ac ſubtiliter inferri, ut ad excolendam rationem nihil aptius eſſe queat, quam*

eas plene cognitas, ac exploratas habere. Sunt autem & alii, qui Algebræ dignitatem, ac præſtantiam vel ob id concutere nituntur, quod ejus ſtudium abſtractis ideis contemplandis adeo mentem aſſueſcit, ut, tum aliis diſciplinis comparandis officiat, cum vitæ civilis uſum intercludat. Sed primo, mentem abſtractæ rerum contemplationi aſſueſcere, tantum abeſt, ut vitio vertendum ſit, quin potius in id ſingulæ animi vires ſint intendendæ. Nam omnes illæ præjudicatæ opiniones, quibus, tum in veri cognitione, cum in rebus agendis obruimur, non equidem aliunde ſuam trahunt originem, & alte noſtris animis hærent, quam ex ideis rerum ſenſibilium, quas ſummo ſtudio colimus, atque fovemus. Deinde, quum Algebra, non tam velut pars Matheſeos, quam velut clavis, qua cuncta diſciplinarum mathematicarum arcana recluduntur, debeat haberi; ſicuti ejus eximius eſt uſus in univerſa Matheſi, ſic & ad ſcientiam rerum naturalium, quæ abſque Matheſi conſiſtere nequit, ſummopere conducat, neceſſe eſt. Et quamquam ejus argumentum nihil commune habeat cum Jurisprudentia, & Theologia; attamen, ſicuti pro hiſce diſciplinis maxime confert Metaphyſica, ſic pro illuſtrandis ſpeculationibus metaphyſicis non aliunde melius petentur exempla, quam ex Algebra, cujus ideæ, non modo ab omni ſenſu, & imaginatione ſunt remotæ, verum etiam ſimpliciſſimæ ſunt, nulliſque difficultatibus obnoxiæ. Denique nec item intelligimus, qua ratione Algebræ ſtudium vitæ civilis uſum intercludere, rebuſque agendis impares nos efficere poſſit. Quum enim oſtenſum ſit, omnes alias diſciplinas ea, qua par eſt, ratione non aliter, quam ejus præſidio, poſ-

ſe

ſe comparari; utique ei ferri poſsunt accepta cuncta illa commoda, quæ in vita activa ex diſciplinis omnibus nobis derivantur. Aut igitur neceſse eſt, ut nullus ſit ſcientiarum uſus in actionibus noſtris obeundis, quod nemo dixerit, cui ſanum eſt cerebrum; aut, ſi in iis peragendis aliquos nobis ſuppetunt fructus, quos ſane uberrimos largiuntur, maxime in Algebram, quæ eſt fons, & origo ſcientiarum omnium, eos rejicere neceſse eſt. Interim, etſi hæc in ſe ſpectata veriſſima ſint, urgent tamen exempla, quæ contrarium nobis oſtendunt. Qui enim Algebram profitentur, tanta mentis alienatione ut plurimum laborant, ut nec ad aliorum ſermones animum intendere, nec ſenſa ſua eloqui valeant; verborum ſunt adeo frugales, ac inopes, ut vix aliis, quam monoſyllabis vocibus, ſermones ſuos abſolvant; denique vitam ſuam ſubinde tranſigere videntur, ac ſi in hac ſocietate non eſſent, nec humana negotia ad eos pertinerent. Sed ſubeunt hæc incommoda qui Algebram profitentur, hoc eſt, qui in diuturno Algebræ ſtudio omnem fere vitam impendunt. Id vero nihil nos movere debet. Neque enim novum eſt, ut qui alicui diſciplinæ excolendæ omnem operam navant, amore ejus ſubinde rapiantur, ut diſciplinas alias negligent, nec expleant officia, quibus humana ſocietas continetur. Et, ſicuti id ultro eis ignoſcitur, quia cultura ejus diſciplinæ humanæ conferunt ſocietati; ita culpa non vacant, qui eam ob cauſam ejuſdem diſciplinæ ſtudium carpunt. Verum iiſdem incommodis minime ſubjacent ii, qui diſciplinis addiſcendis eo conſilio animum admovent, ut ſuam excolerent rationem, & ea, quæ decet, ratione in hac ſocietate ſe gererent. Quum enim non ea illorum

 mens

mens ſit, ut Algebræ promovendæ viribus omnibus incumbant; utique in ejus ſtudio non aliud tempus impendent, quam quod requiritur, ut illius ubertas, ac ſolertia deguſtentur. Iis autem deguſtatis, ſicuti ad alias diſciplinas ſtatim ſe conferunt, ſic in iis capeſſendis prævium Algebræ ſtudium maximo eis erit adjumento: unde demum, ſolida rerum cognitione imbuti, nec iis obnoxii erunt præjudiciis, quibus vulgus hominum miſere laborat, nec vitam ſuam aliter tranſigere curabunt, quam eos decet, qui rectæ rationis ſunt compotes. Sed rurſus hæc omnia ultro nobis concederentur, ſi ex Algebra ad alias diſciplinas facili negotio progredi liceret. Id vero quam ſit difficile factu, ſatis ſuperque quotidiana docet experientia. Quos enim Algebræ ſtudium ſemel ſibi ſubjecit, ii adeo illius illecebris detinentur, ut non aliis diſciplinis ſedulo deinceps incumbant, quam quæ algebraice poſſunt pertractari; & omnino negligunt eas, quæ nullam cum Algebra affinitatem habentes, magis humanæ conducunt ſocietati. Verum huic, quod modo nobis objicitur, plurima reponi poſſunt. Primo enim id ipſum, ſi verum foret, Algebræ præ cæteris diſciplinis dignitatem, ac præſtantiam maxime commendaret; quum non aliunde quidem eveniret, ut, qui ſemel eam deguſtarint, diſciplinarum aliarum tædio afficerentur, quam quia nullibi mens noſtra magis ſpatiatur, & verum, ad quod tendit, tutius aſſequitur, quam ſtudio ejus diſciplinæ. Deinde dubitari merito poteſt, num humanæ ſocietati magis proficuæ cenſendæ ſint diſciplinæ illæ, quæ nihil cum Algebra commune habent; nam ſicuti humana ſocietas artibus potiſſimum continetur, ſic non alias diſciplinas magis huma-

nò generi conferre putandum eſt, quam quibus artes promoventur. Denique exempla illa, quæ objici poſſent, multum abeſt, ut argumento nobis eſſe debeant, quo illud ſemper evenire credendum ſit; quum non alia ratione ea magis in oculos incurrant, quam quia nemo Algebræ ſtudium eo quidem conſilio aggreditur, ut in ea excolenda omne vitæ tempus impendat. Et ſane hujuſmodi exempla, ſi hominum indoles ſpectetur, rariora proculdubio eſſe debent. Nam iis ut plurimum homines incumbere videmus, ex quibus, vel vitæ præſidia nobis derivantur, vel honores, dignitateſque percipiuntur: quorum quidem utrumque ex diuturno Algebræ ſtudio fruſtra expetere licet. Pro bono itaque ſcientiarum, & artium optandum foret, ut ea eſſent paulo crebriora: quod tunc demum facile fiet, ubi diſciplinæ hujus momentum cunctis innotuerit. Sunt demum & alii, qui, tum Algebræ, cum univerſæ Matheſeos ſtudium idcirco tenebris committendum eſſe decernant, quod mentem noſtram nimia luce perfundant. Quum enim ea claritas, ac evidentia, cui ſcientiæ mathematicæ mentem aſſueſcunt, nequeat in aliis diſciplinis haberi; omnino neceſſe eſt, ut hæreat animus, quum Matheſis limites egreditur. Hinc univerſalem illum Scepticiſmum, qui noſtro obtinet ævo, nonniſi diſciplinis mathematicis, quæ ſummo ſtudio excoluntur, paſſim ferunt acceptum. Qui enim demonſtrationibus geometricis ſunt aſſueti, ægre iis præbent aſſenſum, quæ eandem certitudinem præ ſe ferre non videntur. Itaque in dubium vertunt quicquid rigore geometrico ipſis non obtruditur; ſuoque exemplo in univerſalem hanc dubitationem alios etiam trahunt. Id vero æquo animo ferendum eſſet, ſi intra

ea

ſi qua eſt diſciplina, quæ eam ab hominum impudentia magis vindicare valeat, ea proculdubio eſt ipſa illa Matheſis, quam ad faſtigium evectam noſtris temporibus intuemur. Ex iis enim, qui chriſtianæ religioni bellum indicunt, alii quidem ad id adducuntur, quia alte ſibi perſuadent, certitudinem abſque evidentia non poſſe conſiſtere; alii vero exinde moventur, quod ejus myſteria non modo incomprehenſibilia ſint, ſed cum ipſa naturali ratione ex diametro pugnare videantur. Verum, quantum ad primos, quum multa in Matheſi certiſſime demonſtrentur, a quibus adeo procul eſt evidentia, ut paradoxa nobis appareant; non melius, quam Matheſeos ſtudio, ab eo errore retrahi poterant. Ad ſecundos vero quod attinet, quia in Matheſi non raro etiam occurrit, ut veritates, nullum inter ſe nexum habentes, imo longe a ſe invicem diſſitæ, in concordiam veniant, ubi ad univerſales rerum notiones aſcenditur; poterunt earum exemplo conjicere, veritates revelatas mire cum iis conſentientes apparituras, quas naturalis ſuppetit ratio, ſi ſpeciales noſtræ mentis ideæ ad omnimodam ſuam univerſalitatem evebi poſſent. Quum igitur adeo abſit a vero, ut Matheſeos ſtudium religioni noſtræ officere poſſit, quin potius maxime ei conferre cenſendum ſit: plane neceſſe eſt, ut, ſi qui extent Mathematici, qui eam inſequuntur, aliunde quidem, quam a Matheſi, eorum perfidia oriatur; ut ſane Anglorum Mathematicorum impudentia non alteri cauſæ ferenda eſt accepta, quam eidem illi, quæ univerſam Gentem Anglicam a vera fide exulem tenet, ac extorrem: nempe quod Eccleſiæ jugum excuſſerint, nec ejus, qui Chriſti vices in terris gerit, auctoritatem agnoſcere velint. Vale.

AL-

ALGEBRÆ GEOMETRIA PROMOTÆ ELEMENTA

INTRODUCTIO.

I. NIl novi acccidit, Faustina Princeps, ſi in quæſtionibus arithmeticis enodandis Algebræ ſolertia, ac ubertate deguſtata, ad eam pro viribus excolendam, nunc unice annitaris. Ea etenim eſt diſciplinarum mathematicarum vis, atque poteſtas, ut quos ſemel ſuis illecebris ſibi devincunt, eos numquam a ſe ipſis abire patiantur; ſed novis ſemper oblectamentis illos ad ſe trahunt, ac viriliter alliciunt. Id vero mirum Tibi nec etiam videri debet. Nam ſuapte natura trahitur quiſque noſtrum ad Deum, fontem veritatis. Unde earum diſciplinarum, in quibus, & a vero numquam diſceditur, & novæ ſemper, ac novæ veritates addiſcuntur, nemo ſane tædio affici poteſt.

II. Ut autem injuncto mihi muneri ego etiam pro viribus ſatisfaciam, nova Algebræ Elementa in Tui commodum, & uſum conſcribere non gravabor. Ac principio qui-

quidem illud tenendum eſt, Algebræ nomine eam proprie venire diſciplinam, quæ problemata mathematica, adhibito calculo, reſolvere docet. Sed, quemadmodum mathematica dicuntur problemata illa, quæ circa quantitatem inſtituuntur; ita primum Algebræ munus eſt, ipſas quantitates quibuſdam notis, ſeu characteribus exprimere, eaſdemque ſubinde expreſſas ad calculum revocare.

III. Interim Algebra, nomen ab Arabibus derivatum, ſecundum vim ſuam, idem audit, ac ars reſtituendi, ſeu reintegrandi. Nec ſane ab opere hujus artis iſta abhorret denominatio. Ubi enim in reſolutione problematum ad quæſitę quantitatis determinationem Algebræ ſubſidio proceditur; primo quidem quæſita illa quantitas deformatur, & quodammodo ſcinditur in partes; deinde vero reintegratur, ac velut in juſtum ordinem reſtituitur.

IV. Hanc porro diſciplinam vocamus Algebram arabico nomine; quia, etſi apud alias quoque Nationes fuerit exculta, eam tamen ab Arabum manibus nos proprie mutuati ſumus, a quibus etiam accepimus maximam partem græcæ ſapientiæ. Neque enim latinas, quas habemus, verſiones Euclidis, Apollonii, Ptolomæi, aliorumque Græcorum, putandum eſt, ex græcis originalibus fuiſſe primo depromptas. Nam, ad noſtras manus perveniſſe prius eorum verſiones arabicas, quam ipſa Græcorum originalia, notius eſt, quam ut poſſit in dubium revocari.

V. Al-

V. Algebra in Europam delata, Itali primum eam excoluerunt; nec ullus, opinor, erit, qui primatum iſtum audebit nobis diſputare. Inter Italos autem primus, qui de Algebra ſcripſit, eſt Lucas Pacciolus, dictus etiam Lucas de Burgo. Et quamquam memoret ille Leonardum Piſanum, alioſque ſe antiquiores, a quibus didicerat; eorum tamen opera typis edita non habentur. Pacciolum ſecutus eſt Stiphelius, aliique ab ipſo citati; ſed omnes iſti iis tantum excolendis operam ſuam collocarunt, quibus Arabes Algebram perduxerunt.

VI. Qui Algebram evehere longius inter Italos ſtuduit, is omni dubio procul eſt Nicolaus Tartalea. Etſi enim reſolutionem æquationum cubicarum ſub nomine Ludovici Ferrarienſis mathematico Orbi impertiverit Cardanus; eam tamen Tartaleæ tribuendam eſſe, jam norunt Naſutiores. Tartaleam excipit Bombellius, qui, quum docuiſſet, qua ratione æquationes quarti gradus, ope alterius cubicæ, in duas quadratas dividi poſſent, methodum ſimul aperuit, qua reſolutio æquationum quarti gradus poteſt obtineri.

VII. Dum hiſce Itali, Arabum veſtigiis inſiſtentes, incumbebant, in lucem rediit Diophantus Alexandrinus, antiquioribus quidem Græcis non accenſendus, ſed neque etiam adeo ab iis remotus, quemadmodum nonnulli ſuſpicantur. Opus iſtud Diophantæum, etſi non integrum, ſat quidem oſtendit, quouſque a Græcis perducta

ſuerit Algebra. Quumque voces, a Diophanto uſurpatæ, diverſæ ſint ab iis, quibus Arabes utebantur; conjicere licet, hos aliunde, quam a Diophanto, Algebram accepiſſe ſuam: eoque magis, quod multo plura in Diophanto reperiantur, quam quæ Arabes Italis noſtris tradiderunt.

VIII. Horum omnium Algebra erat quidem figurata, ſeu ſymbolica; ſed vix alias, quam incognitas quantitates, certis notis, ac ſymbolis deſignabant. Datas enim, ſeu cognitas quantitates numeris tantum exprimebant. Unde ſaltem ex hoc capite numeroſa adhuc ipſorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimiſexti ſæculi novam in Gallia protulit Algebræ ſpeciem Franciſcus Vieta, ubi quantitates omnes, tum cognitæ, cum incognitæ, Alphabeti litteris, ſeu ſpeciebus deſignantur. Hincque factum, ut Algebra litteralis, ſeu ſpecioſa diceretur.

IX. Vietam ſecuti ſunt Angli, quos inter duo potiſſimum eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, a Vieta excogitatam, inſigniter promoverunt; ſed potiſſimum in id dedit operam Harriotus, qui primus omnium docuit, æquationes altioris gradus componi ex ſimplicioribus, inter ſe multiplicatis. Magnum ſane principium, unde natura, & proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo fluunt.

X. Algebra porro litteralis quantum numeroſæ præferenda ſit, vel exinde intelligi poteſt, quod ea mediante ſolutiones pro-

problematum ſpeciales ad ſuam univerſalitatem revocantur. Ubi enim notæ quantitates congruis numeris exprimuntur, ignotæ quantitatis valor numeris etiam prodit expreſſus: unde pro eo tantum, de quo agitur, caſu nobis uſui erit. Verum, quum datæ quantitates, perinde ac quæſitæ, Alphabeti litteris deſignantur; quia ſymbola iſta nihil ex ſe ipſis ſignificant, ea indeterminato quodam modo quantitates datas repræſentabunt: proindeque quæſita quantitas ſubinde etiam expreſſa orietur.

XI. Hinc ſolutione problematis numeroſa unicus tantum caſus expenditur; quum tamen ſolutione litterali omnes omnino caſus enodantur. Et quamquam ex ſolutione numeroſa poſſit quandoque generalis regula colligi, caſibus omnibus inſerviens; id tamen tantum non eſt impoſſibile factu, quum problema nimiam difficultatem involvit, ac plures exigit operationes, ut ad exitum perducatur. Nam notæ arithmeticæ hoc etiam habent incommodi, quod per earum additionem, ſubtractionem, multiplicationem, ac diviſionem aliæ oriuntur quantitates, in quibus eæ, ex quibus ſubnaſcuntur, non amplius apparent.

XII. Etſi autem Algebra Vietæa, utpote litteralis, ac ſpecioſa, univerſalior eſſet ea, quæ antea obtinebat; revera tamen non aliud erat, quam ipſa vetus Algebra, Alphabeti litteris adminiſtrata. Quam enim regulam docuerunt Arabes, pro reſolvendis æquationibus quadratis; eandem adhibuit quoque

Vieta. Quam item tradidit Tartalea, pro reſolvendis æquationibus cubicis;eandem plane Vieta pariter adſcivit. Quamque demum excogitavit Bombellius, pro dividendis æquationibus quarti gradus in duas,quæ quadratæ eſſent; eandem in ſua Algebra Vieta itidem uſurpavit.

XIII. Hinc iiſdem difficultatibus,quibus vetus Algebra ſcatebat, nova etiam erat obnoxia. Et ſicuti imperfecta erat olim reſolutio æquationum cubicarum, ab Italis tradita, ſic etiam manſit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciſcus Vieta, ante ipſum a nemine,quem ſciam,traditum:nimirum,qua ratione per rectarum longitudines deſignari queant radices æquationum. Verum, quum ex lineis curvis ſolam circuli circumferentiam in Geometriam recepiſſet; mancam quoque, ac imperfectam materiam iſtam nobis reliquit. Enim vero exhibuit tantummodo earum æquationum conſtructionem, quarum radices rectæ, & circuli interſectione poſſunt inveniri.

XIV. Suborto Carteſio, cœpit ex Algebra, & Geometria ita quidem unum conflari corpus, ut altera per alteram promota, & ad majorem univerſalitatem evecta videretur. Novit namque Carteſius, non modo imperfectam eſſe reſolutionem æquationum cubicarum, ab Italis traditam; ſed rem eſſe omnino deploratam, illam ad umbilicum perducere. Quare opportunum judicavit, hac via omiſſa, radices æquationum omnium per rectarum longitudines deſignare. Unde,

in-

invectis in Geometriam, cum conicis Veterum ſectionibus, tum curvis aliis, quæ ſectionibus conicis magis compoſitæ eſſent; earum cum circumferentia circuli interſectione æquationum omnium docuit conſtructionem.

XV. Id autem ab iis, qui deinceps ſecuti ſunt, non modo non improbatum, ſed a nemine, quem ſciam, expanſis ulnis non exceptum. Singulis etenim innotuit, radices æquationum omnium non melius deſignari poſſe, quam interſectione curvarum. Quare in id omnes dederunt operam, ut non amplius reſolutionem æquationum algebraicam; ſed earundem conſtructionem geometricam excolerent. Atque hac ratione, abdicata ſevera illa lege, abſque ullo fundamento lata, ut id tantum geometricum eſſet, quod recta, & circulo perficitur; non tantum Algebram, ſed ipſam quoque Geometriam promoverunt, & ad ſuam amplitudinem revocarunt.

XVI. Hæc igitur, FAUSTINA PRINCEPS, eſt hiſtorica narratio ortus, & progreſſus ejus diſciplinæ, quæ Algebra dicitur. Unde facile conſpicis, eam in ſe ipſa conſideratam adhuc quidem mancam eſſe, ac imperfectam; ſed fuiſſe non parum promotam, ubi cum Geometria cœpit conſociari. Hinc non nudæ quidem Algebræ Inſtitutiones Tibi conſcribam; ſed Algebram a Geometria promotam, in noſtris hiſce Elementis complectemur. Quo fiet, ut ſicuti conſortio earum diſciplinarum ipſa quoque Geometria

ulterius fuit evecta; ita ſtudio horum Elementorum magis quoque in Geometria proficies.

XVII. Partiemur autem univerſum noſtrum opus in quatuor libros; quorum primus erit de calculo litterali, ſeu ſpecioſo; ſecundus de reſolutione problematum algebraica; tertius de compoſitione locorum geometricorum; & quartus demum de geometrica æquationum conſtructione. Hac enim partitione id omne, quod ad hanc ſcientiam pertinere videtur, poterit jam commode tradi. Priores ſiquidem duo libri Algebram in ſe ipſa conſideratam complectentur; alii vero duo poſteriores promotionem ejus, Geometriæ ſubſidio comparatam, in propatulo ponent.

XVIII. Cæterum ex quatuor hiſce libris, priores duos, jam novennium eſt, & quod excurrit, ex quo in gratiam ſtudioſæ noſtræ Juventutis conſcripſi, & in lucem emiſi. Sed, quum tumultuario ſtudio fuiſſent exarati, & paginæ eorum ederentur, ut nocturna manu conſcribebantur; tuæ utilitati conſulens, eos reficere, & ad majorem perfectionem reducere, non gravabor. Alios vero duos poſteriores nunc primum elucubrabo. Nam, etſi animus mihi ſemper fuerit, eos etiam in lucem emittere; alio tamen diſtractus, fidem publico datam numquam ſolvere potui.

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER I.

De Calculo Litterali, ſeu Specioſo.

1. QUantitates deſignabant Veteres, vel per rectarum longitudines, vel etiam numeris adhibitis. Utraque deſignandi ratio, ut ſuas habet utilitates, ſic ſuis etiam difficultatibus eſt obnoxia. Utile eſt etenim primo, per longitudines rectarum quantitates deſignare, quia tum notæ, cum incognitæ quantitates ſubinde exprimi poſſunt; ſed incommoda eſt quoque ea deſignandi ratio, quia rectarum longitudines non adeo facile ad calculum licet revocare. Et ſecundo præſtat, quantitates deſignare per numeros, quia numeri faciliime poſſunt ad calculum poni; ſed talis deſignandi modus nec etiam difficultate vacat, quia incognitæ quantitates tali pacto deſignari non poſſunt.

2. Hinc ergo tertia quantitates deſignandi ratio excogitata, quæ habet quidem

utriuſ-

utriuſque utilitates, ſed nullius incommodum patitur: nimirum per ſpecies, ſeu litteras Alphabeti. Iſtæ enim, perinde ac numeri, facili negotio ad calculum poni queunt. Quumque nihil ex ſe ipſis ſignificent, poſſunt peræque notas, ac incognitas quantitates nobis exhibere. Qua igitur ratione quantitatum calculus peragi debeat, ubi per Alphabeti litteras, ſeu ſpecies quantitates ipſæ deſignantur; primus hic liber noſtrorum Elementorum oſtendet. Et quoniam in calculo litterali, ſeu ſpecioſo non omnino numeri negliguntur; hinc eſt, ut calculus, de quo hic acturi ſumus, vulgarem, ſeu arithmeticum præſupponat.

3. Diviſio autem quantitatum in commenſurabiles, ſeu rationales, & incommenſurabiles, ſeu radicales locum ſibi vindicat, tam quum numeris deſignantur, quam quum Alphabeti litteris exprimuntur. Unde prioris hujus libri duas primum ſectiones ſtatuemus; unam nempe de calculo quantitatum rationalium; & alteram de calculo quantitatum radicalium. Sed ad ea, quæ deinceps uſui eſſe poſſunt, animum convertentes, duabus hiſce ſectionibus alias duas adnectemus: quarum prior erit de calculo ſerierum infinitarum; poſterior autem generalem poteſtatum theoriam exhibebit.

SE-

SECTIO I.

De Calculo Quantitatum Rationalium.

4. QUantitates algebraicæ dicuntur rationales, quum ſimpliciter litteris deſignantur. Ut calculus harum quantitatum rectius intelligatur, illud principio ſciendum eſt, quod, ſicuti omnes quantitates poſſunt per Alphabeti litteras deſignari; ita earundem multiplices, aut partes quælibet, adhibitis notis arithmeticis, non incongrue exprimuntur. Qua ratione, ſi aliqua quantitas vocetur *a*, erit ejus duplum 2*a*, triplum 3*a*, quadruplum 4*a*, atque ita deinceps.

5. Hi autem numeri, qui quantitatibus algebraicis præfiguntur, ad deſignandum quantum cujuſq; quantitatis ſumi debeat, vocantur communiter coefficientes. Sed notandum hoc loco eſt, quod eę quidem quantitates, quæ nullos habent nuſmeros præfixos, intelligendæ ſint habere unitatem, velut ſuum coefficientem. Unde quantitates, expreſſæ litteris *a*, *b*, *c*, perinde valent, ac 1*a*, 1*b*, 1*c*.

6. Sciendum eſt quoque, quod in peragendo calculo quantitatum, quæ Alphabeti litteris ſunt deſignatæ, præter ipſas litteras, ſolent etiam adhiberi hæc duo ſignà +, & —, quorum primum ſignificat plus,

& eſt

& eſt nota additionis ; alterum ſignificat minus, & eſt nota ſubductionis. Hinc $a + b$ idem valet, ac a plus b; & $c - d$ perinde ſignificat, ac c minus d.

7. Ex ipſa autem horum ſignorum ſignificatione, quemadmodum ultro liquet, $a + a$ idem eſſe, ac $2a$; & $3a + 2a$ idem eſſe, ac $5a$: ita quoque liquido conſtat, $5a - 3a$ idem eſſe, ac $2a$; itemque $3b - 2b$ perinde valere, ac $1b$, ſeu b; & $c - c$, aut $3c - 3c$ idem ſignificare, ac zero, ſeu nihil.

8. Hinc, quum plures occurrunt quantitates, iis ſignis connexæ, iiſdemque litteris deſignatæ, contrahendæ ſunt illæ, habita ſignorum, quibus afficiuntur, ratione. Quo pacto ſeries iſta quantitatum $5a + 3b - 5b - 2a$ reducitur ad $3a - 2b$. Nam, ſicuti $5a - 2a$ idem eſt, ac $3a$; ita $+ 3b - 5b$ perinde valet, ac $- 2b$. Et eadem ratione reducitur ad $5a - 7b$ ſeries quantitatum $7a - 2b - 5b - 2a$; ſicut ad $3a - 5c$ hæc alia quantitatum ſeries $8a + 2c - 7c - 5a$.

9. Fieri vero debet contractio iſta, ubi quantitates iiſdem omnino litteris ſunt déſignatæ. Nam, ſi habeatur, exempli gratia, $2ab - 3cd - 2cd + 3af$, pro $- 3cd - 2cd$ ſcribi quidem poteſt $- 5cd$; ſed aliæ duæ quantitates $2ab + 3af$ contrahi nequaquam poſſunt, quia non reperiuntur iiſdem omnino litteris expreſſæ. Unde quantitas $2ab - 3cd - 2cd + 3af$ contracta evadet $2ab - 5cd + 3af$: quemadmodum quantitas $3ac + 2bc - 3af - 8bc$, ſi contrahatur, fiet $3ac - 3af - 6bc$.

CA-

CAPUT I.

Calculus rationalium ſimplicium.

10. QUantitatum rationalium duæ ſpecies paſſim diſtinguuntur, quarum aliæ dicuntur ſimplices, aliæ compoſitæ. Rationales ſimplices ſunt illæ, quæ, vel unica littera, vel duabus, pluribuſve litteris, nullo ſigno connexis, deſignantur, ut a, b, c; vel etiam ab, bc, abc. Rationales vero compoſitæ ſunt eæ, quæ duabus, aut pluribus litteris, ſigno $+$, aut $-$ conjunctis, exprimuntur; ut $a+b$, $a-b$; vel etiam $a+b-c$, $a-b+c$. Hinc primo calculum rationalium ſimplicium, tum calculum rationalium compoſitarum oſtendemus.

I. *Additio rationalium ſimplicium.*

11. QUum una quantitas alteri addenda proponitur, non aliud fieri debet, quam unam plus altera ſumere. Hinc adduntur in unum duæ, aut plures rationales ſimplices, conjungendo eas ſigno $+$, quod, ut paulo ante * dictum eſt, ſignificat plus. Sic, ad addendum a cum b, ſcribo $a+b$. Pariterque, ad addendum a cum b, & c, ſcribo $a+b+c$. Neque aliter fiet, ſi addi debeant in unum tres iſtæ rationales ſimplices $2a$, $3b$, $4c$; nam ſum-

* *art.* 6.

ſumma erit $2a + 3b + 4c$.

12. Eadem ratione, ſi addenda proponatur quantitas a cum ſe ipſa, hoc eſt cum alia quantitate a; ſumma erit $a + a$. Sed quoniam utraque quantitas eadem littera deſignatur; per ea, quæ ſuperius * dicta ſunt, ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter, ad addendum $3a$ cum $4a$, ſcribi poterit, vel $3a + 4a$, vel ſimplicius $7a$. Atque ita quoque erit, vel $3c + 2c + 4d$, vel etiam $5c + 4d$ ſumma trium rationalium ſimplicium $3c$, $2c$, $4d$.

* art. 8.

II. Subtractio rationalium ſimplicium.

13. Quum ex una quantitate alteram ſubducere oportet, non aliud fieri debet, quam unam minus altera ſumere. Hinc ex una rationali ſimplice ſubducitur altera rationalis ſimplex, conjungendo ita quidem eas ſigno —, quod diximus * ſignificare minus, ut ſignum iſtud præcedat quantitatem ſubducendam. Ita, ad ſubtrahendum b ex a, ſcribo $a - b$. Pariterque, ad ſubducendum c ex b, ſcribo $b - c$. Neque aliter fiet, ſi ex $3a$ ſubtrahi debeat $2c$; nam reſiduum erit $3a - 2c$.

* art. 6.

14. Eadem ratione, ſi ex quantitate $5a$ ſubtrahenda proponatur quantitas $3a$, reſiduum erit $5a - 3a$. Sed quoniam utraque quantitas eadem littera deſignatur; per ea, quæ ſuperius * dicta ſunt, ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter, ad ſubducendum $4c$ ex $7c$, ſcribi poterit, vel $7c - 4c$, vel ſimpli-

* art. 8.

plicius $3c$. Atque ita quoque reſiduum, quod oritur, ſubducendo $4b$ ex $9b$, erit, vel $9b - 4b$, vel etiam $5b$.

III. *Multiplicatio rationalium ſimplicium.*

15. Rationales ſimplices multiplicantur per ſe mutuo, conjungendo eas, nullo ſigno interjecto. Ita, ſi a multiplicetur per b, productum erit ab. Et ſimiliter, ſi a multiplicetur per c, productum erit ac. Pariterque erit aa productum, quod oritur, multiplicando quantitatem a per ſe ipſam, hoc eſt per aliam quantitatem a.

16. Sed, quemadmodum expreſſio $a + a$ contrahitur, & loco ejus * ſcribitur $2a$; ita expreſſio aa contracta deſignatur per a^2. Qua ratione aaa deſignabitur etiam per a^3, ſicut $aaaa$ per a^4, atque ita deinceps. Unde ſemper ac occurrit quantitas aliqua, cui a tergo numerus aliquis paulo altius ſit adſcriptus, intelligenda eſt quantitas illa toties per multiplicationem poſita, quot habet ille numerus unitates. * *art.* 8.

17. Hi autem numeri, qui quantitatibus algebraicis a tergo paulo altius adſcribuntur, ad deſignandum quoties quæque quantitas per multiplicationem poni debet, dicuntur communiter exponentes. Sed notandum hoc loco eſt, quod eæ quidem quantitates, quæ nullos habent numeros a tergo adſcriptos, intelligendæ ſint habere unitatem,

tem, velut ſuum exponentem. Unde quantitates, expreſſæ litteris a, b, c, perinde valent, ac a^1, b^1, c^1.

18. Hinc magnum diſcrimen intercedit inter coefficientes, & exponentes quantitatum. Ii enim oſtendunt, quoties quantitates poni debent per additionem; iſti vero per contrarium, quoties per multiplicationem ponendæ ſint, nobis aperiunt. Sic expreſſiones iſtæ $2a$, $3a$, $4a$ ſignificant quantitatem a bis, ter, quater poſitam eſſe per additionem; quum tamen hæ aliæ expreſſiones a^2, a^3, a^4 ſignificent eandem quantitatem a poſitam eſſe bis, ter, quater per multiplicationem.

19. Ex eo autem, quod a^2 idem ſit, ac aa; & a^3 idem, ac aaa: liquet, ad multiplicandum a^2 per a^3, ſcribendum eſſe a^5.
* art. 15. Nam, juxta regulam * generalem, ſi aa multiplicetur per aaa, productum erit $aaaaa$: quod idem valet, ac a^5. Atque ita quoque erit a^3 productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a, ſeu a^1; & a^7 productum, quod gignitur, multiplicando a^3 per a^4. Sed, ſi multiplicari debeat a^2 per b^3, productum erit a^2b^3.

20. Quantitates igitur, iiſdem litteris expreſſæ, quæ ſuos habent exponentes, non aliter multiplicantur per ſe mutuo, quam conjungendo ſimul exponentes ipſarum. Sed, ſi quantitates, ad multiplicandum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; multiplicandi ſunt ii, ut in calculo arithmetico. Qua ratione, multiplicando $2a$ per $3c$,

pro-

producitur $6ac$. Et ſimiliter, multiplicando $3a$ per $4b$, productum fiet $12ab$. Atque ita pariter erit $8a^5$ productum, quod oritur, multiplicando $8a^2$ per a^3, ſeu $1a^3$; & $12a^3b^2$ productum, quod gignitur, multiplicando $3a^3$ per $4b^2$.

IV. *Diviſio rationalium ſimplicium.*

21. Diviſio deſtruit id, quod componit multiplicatio. Unde, ſicuti, multiplicando a per b, producitur * ab; * art. 15.
ita, dividendo ab per a, quotiens oritur b. Quocirca diviſio rationalium ſimplicium fieri debet, delendo diviſorem ex dividendo: adeo, ut diviſo abc per a, quotiens erit bc; & diviſo a^5 per a^3, hoc eſt * $aaaaa$ per aaa, * art. 16.
quotiens fiet aa, ſeu a^2.

22. Quod ſi autem diviſor deleri nequeat ex dividendo; tunc, duobus punctis interjectis, ſcribatur diviſor poſt dividendum, idque diviſionem indicabit. Sic, dividendo ab per c, quotiens erit $ab : c$. Et ſimiliter, dividendo bd per a, quotiens producetur $bd : a$. Neque aliter inſtituenda eſt diviſio, quum dividere oportet a^3 per c^2; nam fiet $a^3 : c^2$ quotiens diviſionis.

23. Sed, ſi diviſor, partim deleri poſſit ex dividendo, partim non item; tunc deleatur, quod deleri poteſt, & duobus punctis interjectis poſtſcribatur, quod eſt indelebile. Qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo abd per ac, erit $bd : c$. Et ſimiliter erit $ab : d$ quotiens, qui gignitur, dividendo abc

per cd; & $a^2 : c$ quotiens, qui producitur, dividendo a^6c^2 per a^4c^3.

24. Vulgus Algebriſtarum deſignat fractiones, hoc eſt quotientes diviſionum, quæ peragi nequeunt, eodem prorſus modo, quo deſignantur in vulgari Arithmetica: nempe, ſcribendo diviſorem infra dividendum, lineola interjecta. Sed, eo abdicato, maluimus hunc alium, jam etiam a pluribus receptum, in noſtris hiſce Elementis uſurpare: quem item adhibebimus in deſignandis fractionibus numericis.

25. Ita, ſi eſſent deſignandæ tres quintæ partes unitatis, uſurpabimus quidem duos numeros 3, & 5, ſed illos ſcribemus in hunc modum $3:5$. Unde etiam $2:7$ erunt duæ ſeptimæ partes unitatis; & $4:9$ erunt unitatis quatuor nonæ partes. Atq; hac ratione, ſicuti $2a, 3a, 4a$ ſunt duplum, triplum, quadruplum quantitatis a; ſic pariter $2a:3$, $3a:4$, $a:5$ erunt ejuſdem quantitatis a duæ tertiæ partes, tres quartæ partes, una quinta pars.

26. Cæterum, ſi quantitates, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes, dividendi ſunt ii, ut in calculo arithmetico. Qua ratione, dividendo $6ac$ per $2a$, quotiens erit $3c$. Pariterque, dividendo $12ab$ per $3a$, quotiens fiet $4b$. Sed, ſi dividere oporteat $7ac$ per $3a$, quotiens erit $7c:3$; eritque etiam $4ab:5c$ quotiens, qui oritur, dividendo $4ab$ per $5c$; & $3a^2:2$ quotiens, qui producitur, dividendo $3a^5$ per $2a^3$.

CA-

CAPUT II.

Calculus rationalium compoſitarum.

27. OStenſo calculo rationalium ſimplicium, oſtendendus eſt modo calculus rationalium compoſitarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Ut autem diximus ſupra *, vocantur rationales compoſitæ, quæ pluribus litteris, ſigno +, vel — connexis, exprimuntur. Unde duæ in iis quantitatum componentium ſpecies diſtingui ſolent: nimirum poſitivæ, quas ſignum + præcedit; & negativæ, quæ ſigno — afficiuntur.

* *art.* 10.

28. Vulgatum eſt apud Algebriſtas, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates vero negativas nihilo minores. Id autem ut rectius intelligatur, ſciendum eſt prius, zero, ſeu nihil, quantitatibus additum, earum valorem, nec augere, nec minuere. Quocirca, quod potis eſt, quantitatis alicujus valorem augere, cujuſmodi eſt omnis quantitas poſitiva; id nihilo majus dicendum eſt. Et per contrarium, quod quantitatis alicujus valorem minuere valet, veluti eſt quælibet quantitas negativa; id nihilo minus debet appellari.

29. Ex quo patet, quantitates dici poſitivas, vel negativas, hoc eſt nihilo majores, vel minores, non quidem ex ſe ipſis, ſed relate ad eas, de quibus valorem ſuum affirmant,

vel negant. Nam cæteroqui nemo, opinor, ibit inficias, quin omnis quantitas, in ſe ſpectata, ſit poſitiva, ſeu nihilo major. Cæterum, quia illæ quantitates, quæ nullo ſigno afficiuntur, idem præſtant, ac quantitates, affectæ ſigno +; idcirco conſiderabimus illas in poſterum etiam, ut affectas ſigno +; atque hac de cauſa eas quoque velut poſitivas habebimus.

I. *Additio rationalium compoſitarum.*

30. ADditio rationalium compoſitarum fit, conjungendo eas iiſdem omnino ſignis, quibus partes ipſarum ſunt affectæ, & obſervando ſemper hæc duo. Primum, quod illæ rationales ſimplices, quæ nullo ſigno afficiuntur, per ea, quæ paulo ante * dicta ſunt, conſiderari debent, velut affectæ ſigno +. Et alterum, quod eæ rationales ſimplices, quæ iiſdem omnino litteris ſunt expreſſæ, contrahendæ ſunt * in unum, habita ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

* *art.* 29. * *art.* 8.

31. Hoc pacto, ſi quantitati $a+b$ addenda ſit quantitas $c+d$, fiet ſumma $a+b+c+d$. Et ſimiliter, ſi quantitati $a-b$ addenda ſit quantitas $c-d$, ſumma orietur $a-b+c-d$. Sed, ſi quantitas $a+b$ addenda ſit quantitati $a-b$, ſumma erit $2a$; nam per regulam generalem * ſumma earum quantitatum eſt $a+b+a-b$; atqui $a+a$ eſt $2a$, & $+b-b$ eſt zero, ſeu nihil. Atque ita quoque ſumma quanti-

* *art.* 30.

tita-

-titatum $2a - 3b$, & $3a + b$, erit $5a - 2b$; quemadmodum erit $6a - 4c$ ſumma quantitatum $4a - 6c$, & $2a + 2c$; ut & $5a - 6d$ ſumma quantitatum $8a - 9d$, & $3d - 3a$.

II. Subtractio rationalium compoſitarum.

32. Subtractio rationalium compoſitarum fit, conjungendo quidem eas, ut in additione, ſed mutando ſigna omnia partibus quantitatis ſubtrahendæ. Qua in re duo etiam, oportet, obſerventur. Primum, quod rationales illæ ſimplices, quæ nullo ſigno afficiuntur, conſiderari debent *, velut affectæ ſigno +. Et alterum, quod eæ ſimplices rationales, quæ reperiuntur iiſdem litteris expreſſæ, facta ſubtractione contrahendæ ſunt * in unum, habita ſignorum, quibus afficiuntur, ratione. * art. 29. * art. 8.

33. Hoc pacto, ſi ex quantitate $a + b$ ſubducenda ſit quantitas $c + d$, reſiduum fiet $a + b - c - d$. Et ſimiliter, ſi ex quantitate $a - b$ ſubducenda ſit quantitas $c - d$, reſiduum orietur $a - b - c + d$. Sed, ſi ex quantitate $a + b$ ſubducere oporteat quantitatem $a - b$, reſiduum fiet $2b$; nam per regulam * generalem reſiduum illud eſſe debet $a + b - a + b$; atqui $a - a$ eſt zero, ſeu nihil, & $+ b + b$ perinde valet, ac $2b$. Atque ita quoque, ſi ex quantitate $3a - 3b$ ſubducenda ſit quantitas $2a + 2b$, reſiduum erit $a - 5b$; pariterq; erit $2a + 8b$ reſiduum, quod oritur, ſubducendo $2a - 3b$ ex $4a + 5b$. * art. 32.

34. Unde liquet, mediante ſubtractione

quantitates poſitivas fieri negativas, & viciſſim quantitates negativas evadere poſitivas. Nam, ex quantitate $a + b$ ſubducta quantitate altera $c - d$, reſiduum juxta re-
* art. 32. gulam * datam fit $a + b - c + d$. Et profecto, quemadmodum quantitas c ex poſitiva abiit in negativam; ita viciſſim quantitas d ex negativa verſa eſt in poſitivam.

35. Quod autem, ad ſubducendam quantitatem $c - d$ ex altera $a + b$, mutanda ſint ſigna partibus quantitatis ſubducendæ, & pro reſiduo ſcribendum $a + b - c + d$; id facile demonſtratur. Debet enim ex quantitate $a + b$ ſubtrahi quantitas c, diminuta quantitate d. Quare, ſi ex $a + b$ ſubducatur tota quantitas c, plus juſto tollitur; & reſiduum $a + b - c$ minus erit juſto reſiduo, quantitate altera d. Unde, ad verum reſiduum obtinendum, oportet, ei addere quantitatem d, & ſcribere $a + b - c + d$.

III. *Multiplicatio rationalium compoſitarum.*

36. Multiplicatio rationalium compoſitarum fit, multiplicando ſingulas partes unius per ſingulas partes alterius, & ſcribendo producta partialia ſigno $+$, aut $-$, prout quantitates ad invicem multiplicandæ iiſdem, aut contrariis ſignis afficiuntur. Ubi duo etiam ſunt obſervanda. Primum, quod rationales illæ ſimplices, quæ nullo ſigno afficiuntur, conſide-
* art. 29. randæ ſunt *, velut affectæ ſigno $+$. Et alterum, quod ſi facta multiplicatione plura occur-

currant producta partialia, iiſdem omnino litteris expreſſa, contrahenda ſunt * in unum, habita ſignorum, quibus afficiuntur, ratione. * *art.8.*

37. Hac igitur ratione, ſi quantitas $a - b$ multiplicanda ſit per aliam $c - d$; multiplico primum a per c. Et quia utraque quantitas afficitur nullo ſigno, ſive potius ſigno $+$, productum ac etiam ſigno $+$ affici debet. Deinde multiplico b per c. Et quia quantitates iſtæ contrariis ſignis afficiuntur, productum bc ſigno $-$ afficio. Ad hæc multiplico a per d. Quumque harum quantitatum contraria itidem ſint ſigna, productum ad ſigno $-$ ſubſcribo. Denique multiplico b per d. Et quoniam iſtæ quantitates iiſdem ſignis ſunt affectæ, productum bd notari debet ſigno $+$. Unde productum totius multiplicationis erit $ac - bc - ad + bd$.

38. Similiter, ſi quantitas $2a + 3b$ multiplicanda ſit per quantitatem $3c - 2d$, productum fiet $6ac + 9bc - 4ad - 6bd$. Sed, ſi quantitas $a + b$ multiplicari debeat per ſe ipſam, hoc eſt per $a + b$, productum erit $a^2 + 2ab + b^2$; nam per regulam * generalem productum illud eſſe debet $a^2 + ab + ab + b^2$; atqui $+ ab + ab$ idem eſt, ac $+ 2ab$. Et, ſi eadem quantitas $a + b$ multiplicanda ſit per $a - b$, productum fiet $a^2 - b^2$; nam regula * generalis dat pro producto $a^2 + ab - ab - b^2$: profecto autem $+ ab - ab$ idem eſt, ac zero, ſeu nihil. * *art.36.* * *art.36.*

39. Eadem autem ratione id, quod producitur, multiplicando quantitatem $3a - 2b + 4c$ per hanc aliam $4a - 3c$, erit $12a^2$

 $- 8ab$

$- 8ab + 7ac + 6bc - 12c^2$. Atque ita quoque erit $15a^2 - 21ab + 5ac + 6b^2 + 7bc - 20c^2$ productum, quod oritur, multiplicando quantitatem $5a - 2b - 5c$ per hanc aliam $3a - 3b + 4c$. Et $45ac - 18c^2 + 30cd - 18a^2 - 24ad - 8d^2$ id, quod gignitur, multiplicando ad invicem duas haſce quantitates $6a - 3c + 4d$, & $6c - 3a - 2d$.

40. Quod autem productum affici debeat ſigno $+$, quum quantitates, ad invicem multiplicandæ, iiſdem ſignis afficiuntur; & viciſſim ſigno $-$, quum contrariis ſignis ſunt affectæ: haud difficile erit oſtendere. Primo enim, quod quantitas $a - b$ multiplicata per c producat $ac - bc$; oſtenditur in hunc modum. Per quantitatem c multiplicanda eſt quantitas a, diminuta quantitate b. Quare, ſi a per c multiplicetur, productum ac majus erit juſto producto, ea quidem quantitate, quæ producitur, multiplicando b per c, nimirum quantitate bc. Unde, ſi quantitas iſta bc ſubducatur ex ac, reſiduum $ac - bc$ verum productum deſignabit.

41. Secundo, quod quantitas $a - b$ multiplicata per quantitatem $c - d$ producat $ac - bc - ad + bd$; demonſtratur eadem ratione. Per quantitatem $c - d$ multiplicanda eſt quantitas a, diminuta quantitate b. Quare, ſi a per $c - d$ multiplicetur, productum, quod oritur, $ac - ad$ majus erit juſto producto, ea quidem quantitate, quæ producitur, multiplicando b per $c - d$, nimirum quantitate $bc - bd$. Unde, ſi quanti-

ti-

titas iſta $bc - bd$ ſubducatur ex $ac - ad$, reſiduum $ac - ad - bc + bd$ verum productum deſignabit.

42. Cæterum nolim hic reticere, utile plerumque eſſe, multiplicationem rationalium compoſitarum minime peragere, ſed tantum eam indicare. Id vero præſtabimus, ponendo punctum inter ipſas quantitates, parentheſi incluſas. Ita, ſi multiplicanda proponatur quantitas $a + b$ per quantitatem aliam $c - d$, exhibebimus productum in hunc modum $(a + b).(c - d)$. Atque ita quoque, ſi quantitas $a + b$ multiplicanda ſit per ſe ipſam, hoc eſt per aliam quantitatem $a + b$, deſignabimus productum, vel in hunc modum $(a+b).(a+b)$, vel paulo ſimplicius hac alia ratione $(a+b)^2$. Unde etiam expreſſiones iſtæ $(a + b)^3$, $(a + b)^4$ deſignabunt deinceps quantitatem $a + b$ ter, quater poſitam per multiplicationem.

IV. Diviſio rationalium compoſitarum.

43. Diviſio rationalium compoſitarum fit eadem omnino ratione, qua efficitur diviſio numerorum in calculo arithmetico. Proponatur, exempli cauſa, dividenda quantitas $ac + bc + ad + bd$ per aliam $a + b$. Divido primum ac per a. Et quia, multiplicato diviſore $a + b$ per quotientem c, producitur quantitas $ac + bc$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda relinquit $+ ad + bd$; divido ſecundo $+ ad$

per

per a. Quumque quantitas, quæ producitur, multiplicando diviſorem $a + b$ per alium iſtum quotientem $+ d$, ſit $+ ad + bd$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, quotientem totius diviſionis eſſe $c + d$.

44. Non diſſimiliter fieri debet diviſio, ſi quantitates, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes. Ita, ſi velim dividere quantitatem $8a^2 + 12ab + 6ac + 9bc$ per hanc aliam $2a + 3b$; divido primum $8a^2$ per $2a$. Et quia quotiens eſt quantitas $4a$, quæ multiplicata per diviſorem $2a + 3b$ producit $8a^2 + 12ab$; ſubtraho quantitatem iſtam ex quantitate dividenda. Quumque ſuperſit $+ 6ac + 9bc$, divido ſecundo $+ 6ac$ per $2a$. Et quoniam, multiplicato quotiente iſtius diviſionis $+ 3c$ per diviſorem $2a + 3b$, oritur quantitas $+ 6ac + 9bc$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil: proinde quotiens propoſitæ diviſionis erit $4a + 3c$.

45. Quantum ad ſigna, quibus afficiendi ſunt quotientes, qui ex quantitatum diviſionibus oriuntur, hæc regula perpetuo eſt obſervanda, ut quotieſcumque quantitates, per ſe mutuo dividendæ, iiſdem ſignis ſunt affectæ, quotiens notari debeat ſigno $+$; quotieſcumque vero afficiuntur ſignis contrariis, ſcribendus ſit quotiens ſigno $-$. Ita, ſi quantitas $ac - bc - ad + bd$ dividenda ſit per $a - b$, quotiens erit $c - d$. Nam, diviſo ac per a, multiplicatoque quotiente c per diviſorem $a - b$, producitur quan-

quantitas $ac - bc$, quæ ſubducta ex quantitate dividenda relinquit $-ad + bd$. Unde, quia diviſo $-ad$ per a, multiplicatoque quotiente $-d$ per diviſorem $a - b$, producitur quantitas $-ad + bd$, quæ ſubtracta ex illo reſiduo relinquit nihil; proinde quotiens propoſitæ diviſionis erit $c - d$.

46. Neque vero difficile erit, allatæ regulæ veritatem oſtendere. Quotiens enim, per diviſorem multiplicatus, producere debet quantitatem dividendam. Quare idem quotiens tali ſemper ſigno affici debet, ut ex multiplicatione ejus per diviſorem oriatur quantitas dividenda. Unde omnino neceſſe eſt, ut notetur ſigno $+$, quum quantitates, ad invicem dividendæ, iiſdem ſignis afficiuntur; & ſigno $-$, ubi contrariis ſignis ſunt affectæ. Nam dumtaxat hac ratione * ex multiplicatione quotientis per diviſorem producitur quantitas dividenda. * art. 36.

47. Interdum in quantitate dividenda non reperitur tota illa quantitas, quæ oritur ex multiplicatione quotientis per diviſorem. Id vero quum accidit, non illico deſpondendum eſt animo; quia fieri poteſt, ut adhuc diviſio peragi queat. Proponatur, exempli gratia, dividenda quantitas $a^2 - b^2$ per $a + b$. Jam, diviſo a^2 per a, multiplicatoque quotiente a per diviſorem $a + b$, producitur quantitas $a^2 + ab$, quæ non reperitur tota in quantitate dividenda. Verum, quia facta ſubductione remanet $-ab - b^2$, dividatur deinde $-ab$ per a. Quumque, multiplicato quotiente $-b$ per diviſo-

ſorem $a+b$, producitur quantitas $-ab-b^2$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil; jam diviſio peracta erit, & fiet $a-b$ quoties ejus diviſionis.

48. Proponatur ulterius dividenda quantitas $10a^2+5ab-14ac-15b^2+29bc-12c^2$ per $2a+3b-4c$. Divido primum $10a^2$ per $2a$. Et quia quotiens $5a$ multiplicatus per diviſorem $2a+3b-4c$ producit $10a^2+15ab-20ac$; ſubduco productum iſtud ex quantitate dividenda, & remanebit $-10ab+6ac-15b^2+29bc-12c^2$. Divido deinde $-10ab$ per $2a$. Et quoniam, multiplicato quotiente $-5b$ per diviſorem $2a+3b-4c$, producitur quantitas $-10ab-15b^2+20bc$; ſubtraho quantitatem iſtam ex illo reſiduo, & relinquetur adhuc $+6ac+9bc-12c^2$. Denique divido $+6ac$ per $2a$. Quumque, multiplicato quotiente $+3c$ per diviſorem $2a+3b-4c$ producatur quantitas $+6ac+9bc-12c^2$, quæ ſubducta ex altero illo reſiduo relinquit nihil; jam peracta erit diviſio, fietque quotiens $5a-5b+3c$.

49. Cæterum, ſi accidat, ut diviſio rationalium compoſitarum tali pacto fieri nequeat; tunc, duobus punctis interjectis, ſcribatur diviſor poſt dividendum. Qua ratione, dividendo a^2+c^2 per $b-d$, quotiens fiet $(a^2+c^2):(b-d)$; & dividendo $ac-bd$ per $m+n$, quotiens erit $(ac-bd):(m+n)$. Quumque utile ſit interdum, diviſionem rationalium compoſitarum haud quidem peragere, ſed tantum eam in-

di-

dicare ; præſtabimus id quoque, ſcribendo diviſorem poſt dividendum, duobus punctis interjectis. Sic $(ac + bc + ad + bd) : (a + b)$ deſignabit diviſionem quantitatis $ac + bc + ad + bd$ per hanc aliam $a + b$: quæ quidem, ſi fiat, orietur quotiens $c + d$, ut paulo ante * vidimus. * art. 43.

CAPUT III.

Calculus fractionum rationalium.

50. Quemadmodum ex additione, & ſubtractione rationalium ſimplicium oriuntur rationales compoſitæ; ſic ex diviſione rationalium, ſive ſimplicium, ſive compoſitarum, quæ fieri non poteſt, fractiones rationales derivantur. Unde, quum jam innotuerit, qua ratione fiat calculus quantitatum rationalium, ſive eæ ſint ſimplices, ſive compoſitæ; ſequitur nunc, ut quo pacto fractionum rationalium calculus peragi debeat, oſtendamus.

51. Ac primo quidem, perinde ac in calculo arithmetico, vocabimus numeratorem fractionis quantitatem, quæ duo puncta præcedit; & denominatorem ejuſdem fractionis quantitatem, quæ puncta illa ſubſequitur. Ita fractionis hujus $ab : c$ erit ab numerator, & c denominator. Pariterque in hac alia fractione $(a^2 - c^2) : (b + d)$ numerator quidem erit $a^2 - c^2$, denominator vero $b + d$.

52. Deinde, ſicuti in calculo arithmetico quilibet numerus integer in formam fractionis exprimi poteſt, ei velut denominatorem unitatem adſcribendo; ita quoque quælibet quantitas litteralis integra poteſt ad modum fractionis exhiberi, ſi ei tanquam denominator eadem unitas adſcribatur. Qua ratione repræſentabitur quantitas ab ad modum fractionis, ſcribendo $ab : 1$. Et ſimiliter quantitas $a^2 - c^2$ exhibebitur ad inſtar fractionis, ſi pro ea ſcribatur $(a^2 - c^2) : 1$.

53. Præterea, ſicuti in vulgari Arithmetica, pro calculo fractionum peragendo, præmittuntur praxes nonnullæ circa reductiones fractionum; ita eædem praxes neceſſariæ ſunt quoque, ut fractiones, de quibus hic agimus, ad calculum poni poſſint. Et quanquam ratio illiuſmodi reductiones inſtituendi non differat ab ea, qua in vulgari fiunt Arithmetica; conſultius tamen exiſtimamus, illas hic breviter proſequi, quam omnino eas præſupponere.

I. *Reductiones fractionum rationalium.*

54. Quantitas aliqua integra, non ſolum in formam fractionis * exprimi, ſed etiam ad fractionem, quæ datum habeat denominatorem, reduci poteſt. Id vero fit, multiplicando quantitatem integram per datum denominatorem, & producto eundem denominatorem datum adſcribendo. Qua ratione, ſi quantitas a reducenda ſit ad fractionem, cujus denominator ſit

* *art.* 52.

c, fiet

c, fiet fractio $ac : c$. Et ſimiliter, ſi quantitatem $a + c$ reducere oporteat ad fractionem, cujus denominator ſit b, fractio erit $(ab + cb) : b$.

55. Perſpicuum eſt autem, hujuſmodi fractiones poſſe rurſus ad quantitates integras revocari. Revocantur vero, dividendo numeratorem fractionis per ejuſdem denominatorem; nam quotiens erit quantitas integra quæſita. Ita, ſi fractio $ac : c$ ad quantitatem integram ſit revocanda, divido numeratorem ac per denominatorem c, & quotiens a erit quæſita quantitas integra. Atque ita quoque $a + c$ erit quantitas integra, ad quam reducitur fractio $(ab + cb) : b$; quandoquidem, diviſo $ab + cb$ per b, fit $a + c$, quotiens diviſionis.

56. Quandoque in calculo fractionum duæ, pluresve fractiones, quæ diverſos habent denominatores, ad eandem denominationem ſunt reducendæ. Obtinetur id autem, multiplicando numeratorem cujuſque fractionis per productum ex denominatoribus aliarum, & adſcribendo cuique producto id, quod ex denominatorum omnium multiplicatione producitur. Qua ratione fractiones $a^2 : c$, & $b^2 : d$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $a^2d : cd$, & $b^2c : cd$. Et ſimiliter fractiones $a^2 : c$, $b^2 : a$, $c^2 : d$, ſi ad eandem denominationem reducantur, fient $a^3d : acd$, $b^2cd : acd$, $ac^3 : acd$.

57. Denique, ſi oportebit, fractiones ad minimos terminos reducere; id fiet, ut in fractionibus arithmeticis, dividendo, tam nume-

meratorem, quam denominatorem propoſitæ fractionis per maximum eorum communem diviſorem. Sic fractio $abcd : acm$, reducta ad minimos terminos, fiet $bd : m$; quum ſit ac maximus communis diviſor numeratoris $abcd$, & denominatoris acm. Pariterque fractio $abcd : (acd + ad^2)$, ſi reducatur ad minimos terminos, evadet $bc : (c + d)$; quandoquidem numeratoris $abcd$, denominatoriſque $acd + ad^2$ maximus communis diviſor eſt ad.

58. Maximus autem communis diviſor duarum quantitatum nullo negotio invenitur, quum, vel utraque quantitas, vel una ad minimum eſt ſimplex. Sic abunde liquet, maximum communem diviſorem eſſe ac relate ad quantitates $abcd$, acm; & ad reſpectu quantitatum $abcd$, $acd + ad^2$. Sed, quum utraque quantitas eſt compoſita, inveniendus eſt ille eodem artificio, quo reperitur in numeris, hoc eſt per diviſionem ſæpius repetitam: modo, cum ipſæ quantitates propoſitæ, tum reſidua, ex diviſionibus orta, exuant diviſores illos, quos minime communes habent.

59. Ita, ſi inveniendus ſit maximus communis diviſor duarum quantitatum $d^4 + 2ad^3 + a^2d^2 + abd^2 + a^2bd$, & $cd^3 + 2acd^2 + a^2cd$; diviſionis ope, detraho primum ex ſecunda proprium ejus diviſorem c; tumque primam $d^4 + 2ad^3 + a^2d^2 + abd^2 + a^2bd$ divido per ſecundam, eo diviſore ſpoliatam, $d^3 + 2ad^2 + a^2d$. Et quia diviſio fieri nequit exacte, ſed remanet $abd^2 + a^2bd$; divi-

vido ſecundam quantitatem $d^3 + 2ad^2 + a^2d$ per hoc reſiduum, ſpoliatum proprio ſuo diviſore ab, hoc eſt per $d^2 + ad$. Quumque diviſio prodeat exacta, erit $d^2 + ad$ maximus communis diviſor propoſitarum quantitatum.

60. Ex eo porro, quod, tum ipſæ propoſitæ quantitates, cum reſidua, ex diviſionibus orta, exuere debent diviſores illos, qui minime iis ſunt communes; liquet, non aliter id, de quo agitur, peragi poſſe, quam, ubi reperire licet diviſores omnes cujuſcumque datæ quantitatis. Ad inventionem autem diviſorum quod attinet, ut nullam ea patitur difficultatem, ubi, vel ſimplex eſt quantitas, vel non adeo compoſita; ita ſummis difficultatibus ſubjacet, quotieſcumque quantitas eſt valde complexa. Quare, quum methodus inveniendi diviſores omnes cujuſque quantitatis hic commode tradi nequeat, opportuniore loco de illa agendum nobis erit.

II. Additio fractionum rationalium.

61. IN additione fractionum rationalium tres caſus ſunt diſtinguendi. Primus eſt, quum fractiones rationales, in unum addendæ, ſunt ejuſdem denominationis. Id vero quum accidit, fiet additio, conjungendo ſimul numeratores fractionum, & adſcribendo ſummæ communem earum denominatorem. Sic ſumma fractionum $bc : a$, & $bd : a$ erit $(bc + bd) : a$. Similiter ſumma fractionum $bd : c$, & $(a^2 - b^2) : c$ erit $(bd + a^2 - b^2) : c$. Atque ita quoque, ſi in unum addendæ ſint fractiones duæ $a^2 : (b + c)$, & $d^2 : (b + c)$, fiet ſumma $(a^2 + d^2) : (b + c)$.

62. Alter caſus eſt, quum fractiones, in unum addendæ, ſunt diverſæ denominationis. Et quum hoc contingit, primo quidem propoſitæ fractiones reducendæ ſunt * ad eandem denominationem, tum addendæ ſunt ſimul, ut in caſu præcedente *. Ita, ſi proponantur in unum addendæ fractiones duæ $ab : c$, & $bc : a$, ſumma erit $(a^2b + bc^2) : ac$; nam fractiones illæ, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $a^2b : ac$, & $bc^2 : ac$. Pariterque, ſi ſimul conjungi debeant duæ fractiones $a^2 : c$, & $(b^2 - d^2) : a$, ſumma erit $(a^3 + b^2c - d^2c) : ac$; quandoquidem, ſi eæ fractiones ad eandem denominationem reducantur, evadent $a^3 : ac$, & $(b^2c - d^2c) : ac$.

* art. 56.
* art. 61.

63. Tertius, & ultimus caſus eſt, quum conjungenda eſt quantitas integra cum aliqua fractione: idque quum evenit, fieri poteſt additio, connectendo quantitates ſigno +. Sic, ad addendum a cum $b^2 : c$, ſcribo $a + b^2 : c$. Sed præſtat quandoque, reducere * quantitatem integram ad fractionem ejuſdem nominis, tum additionem peragere, ut in caſu primo *. Qua ratione in propoſito exemplo eadem ſumma erit $(ac + b^2) : c$; nam quantitas integra a, reducta ad fractionem, cujus denominator ſit c, evadit $ac : c$: profecto autem, conjungendo $ac : c$ cum $b^2 : c$, oritur ſumma $(ac + b^2) : c$.

* art. 54.
* art. 61.

III. Subtractio fractionum rationalium.

64. IN ſubtractione fractionum rationalium tres itidem caſus ſunt diſtinguendi. Primus caſus eſt, quum propoſitæ fractiones ſunt ejuſdem denominationis. Id vero

quum

quum accidit, fiet ſubtractio, ſubducendo ex numeratore unius denominatorem alterius, & reſiduo denominatorem communem adſcribendo. Ita id, quod remanet, ſubtrahendo ex fractione $bc : a$ fractionem aliam $bd : a$, erit $(bc - bd : a$. Similiter id, quod ſupereſt, ubi ex fractione $bd : c$ ſubducitur fractio alia $(a^2 - b^2) : c$, erit $(bd - a^2 + b^2) : c$. Atque ita quoque, ſi fractio $a^2 : (b + c)$ ſubtrahenda ſit ex fractione alia $d^2 : (b + c)$, reſiduum fiet $(d^2 - a^2) : (b + c)$.

65. Alter caſus eſt, quum propoſitæ fractiones ſunt diverſæ denominationis. Et quum hoc contingit, primo quidem propoſitæ fractiones reducendæ ſunt * ad eandem denominationem; tum deinde facienda eſt ſubtractio, ut in caſu præcedente *. Ita, ſi ex fractione $ab : c$ ſubtrahi debeat fractio alia $bd : a$, reſiduum erit $(a^2b - bcd) : ac$; nam fractiones illæ, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $a^2b : ac$, & $bcd : ac$. Pariterque, ſi ex fractione $a^2 : c$ ſubducenda ſit fractio alia $(b^2 - d^2) : a$, reſiduum fiet $(a^3 - b^2c + d^2c) : ac$; quandoquidem, ſi eæ fractiones ad eandem denominationem reducantur, evadent $a^3 : ac$, & $(b^2c - d^2c) : ac$.

* art. 56.

* art. 64.

66. Tertius, & ultimus caſus eſt, quum, vel ex quantitate integra ſubtrahenda eſt aliqua fractio, vel etiam ex aliqua fractione ſubtrahenda eſt quantitas integra: idque quum evenit, fieri poteſt ſubtractio, connectendo quantitates ſigno $-$. Sic, ad ſubtrahendum $b^2 : c$ ex a, ſcribo $a - b^2 : c$. Pariterque, ad ſubtrahendum d ex $b^2 : c$, ſcribo $b^2 : c - d$. Sed præſtat quandoque, reducere * quantitatem integram ad fractionem ejuſdem nominis, tum ſubtractionem

* art. 54.

* art. 64. peragere, ut in caſu primo *. Qua ratione, ſubtrahendo $b^2 : c$ ex a, orietur reſiduum $(ac - b^2) : c$; nam quantitas integra a, reducta ad fractionem, cujus denominator ſit c, fit $ac : c$: profecto autem, ſubtrahendo $b^2 : c$ ex $ac : c$, oritur reſiduum $(ac - b^2) : c$.

IV. *Multiplicatio fractionum rationalium.*

67. IN multiplicatione fractionum rationalium duo tantum caſus diſtingui debent, Primus caſus eſt, quum fractionem unam per fractionem aliam oportet multiplicare. Id vero quum accidit, multiplicandi ſunt per ſe mutuo, tam numeratores, quam denominatores fractionum; dabuntque producta reſpective numeratorem, denominatoremque fractionis, quæ oritur ex propoſita multiplicatione. Qua ratione fractio $a^2 : c$, multiplicata per fractionem $b^2 : d$, producet tertiam fractionem $a^2b^2 : cd$. Pariterque fractio $(a^2 + b^2) : c$, ducta in fractionem $d^2 : a$, dabit pro producto fractionem aliam $(a^2d^2 + b^2d^2) : ac$.

68. Alter caſus eſt, quum fractio aliqua multiplicanda eſt per quantitatem integram. Et quum hoc contingit, primo ſcribatur * quantitas integra ad inſtar fractionis, ei velut denominatorem unitatem adſcribendo; tum fiat multiplicatio, ut in caſu præcedente *. Ita, ſi multiplicanda ſit quantitas integra a per fractionem $bd : c$, adſcribo quantitati integræ a unitatem, ut ipſa quoque formam induat fractionis; tum, quia multiplicanda eſt fractio $a : 1$ per fractionem $bd : c$, fiet productum fractio $abd : c$.

* art. 52.

* art. 67.

69.

69. Unde patet, ad multiplicandam quantitatem integram per aliquam fractionem, non aliud fieri debere, quam multiplicare eam per numeratorem fractionis, & producto eundem denominatorem adſcribere. Ita, ad multiplicandam quantitatem integram a per fractionem $bd : c$, multiplico primum quantitatem integram a per numeratorem fractionis bd, tum producto abd adſcribo eundem denominatorem c, eritque $abd : c$ productum quæſitum. Atque ita quoque, ſi quantitas integra $a + b$ multiplicanda ſit per fractionem $a^2 : c$, fiet productum $(a^3 + a^2b) : c$; quandoquidem, multiplicata quantitate integra $a + b$ per numeratorem fractionis a^2, & producto $a^3 + a^2b$ adſcripto denominatore c, oritur fractio $(a^3 + a^2b) : c$.

V. Diviſio fractionum rationalium.

70. IN diviſione fractionum rationalium tres oportet caſus diſtinguantur. Primus caſus eſt, quum fractio una per fractionem aliam eſt dividenda. Id vero quum accidit, fiet diviſio, multiplicando numeratorem, denominatoremque fractionis dividendæ per denominatorem, numeratoremque alterius fractionis, & ſcribendo producta, ut numeratorem, denominatoremque novæ, quæ in quotiente oriri debet, fractionis. Ita, ſi dividenda ſit fractio $a^3 : c$ per fractionem $b^2 : d$, multiplico primum a^3 per d, deinde multiplico c per b^2, & erit $a^3d : b^2c$ quotiens quæſitus. Pariterque, ſi fractionem $a^3 : c$ dividere oporteat per fractionem aliam $(b^2 + d^2) : a$, orietur quotiens $a^4 :$

$(b^2c + d^2c)$. Atque ita quoque, ſi fractio a^3: $(b + c)$ dividenda ſit per fractionem d^2: $(a+c)$, quotiens fiet $(a^4 + a^3c) : (bd^2 + cd^2)$.

71. Alter caſus eſt, quum quantitas integra per fractionem aliquam eſt dividenda. Et
*art.52. quum id contingit, primo quidem ſcribatur * quantitas integra ad inſtar fractionis, ei velut denominatorem unitatem adſcribendo; tum fiat
*art.70. diviſio, ut in caſu præcedente *. Ita, ſi dividenda ſit quantitas integra a^2 per fractionem $c^2 : a$, adſcribo unitatem quantitati integræ a^2, ut ipſa quoque formam induat fractionis; tum, quia res eo redit, ut dividenda ſit fractio $a^2 : 1$ per fractionem aliam $c^2 : a$, fiet quotiens diviſionis fractio tertia $a^3 : c^2$.

72. Ex quo patet, ad dividendam quantitatem integram per aliquam fractionem, non aliud fieri debere, quam multiplicare quantitatem integram per denominatorem fractionis, & producto numeratorem adſcribere. Ita, ad dividendam quantitatem integram a^2 per fractionem $c^2 : a$, multiplico primum quantitatem integram a^2 per denominatorem fractionis a, deinde producto a^3 adſcribo numeratorem c^2, eritque $a^3 : c^2$ quotiens propoſitæ diviſionis.

73. Tertius, & ultimus caſus eſt, quum viciſſim fractio aliqua dividenda eſt per quantitatem integram: idque quum evenit, ſcribatur
*art.52. * ſimiliter primo integra quantitas ad inſtar fractionis, adſcribendo ei unitatem, velut denominatorem; tum fiat adhuc diviſio, ut in caſu pri-
*art.70. mo *. Ita, ſi dividenda ſit fractio $a^3 : b$ per quantitatem integram c, adſcribo unitatem quantitati integræ c, ut ipſa quoque fractionis in-

induat formam; tum, quia dividenda eſt fractio $a^3 : b$ per fractionem aliam $c : 1$, fiet quotiens propoſitæ diviſionis fractio tertia $a^3 : bc$.

74. Unde patet, ad dividendam fractionem aliquam per quantitatem integram, non aliud fieri debere, quam multiplicare denominatorem fractionis per ipſam quantitatem integram, & productum eidem numeratori adſcribere. Ita, ſi fractio $a^3 : b$ dividenda ſit per quantitatem integram c, multiplico primum denominatorem fractionis b per quantitatem integram c, deinde productum bc adſcribo eidem numeratori a^3, eritque fractio $a^3 : bc$ quotiens, qui ex propoſita diviſione oritur.

CAPUT IV.

Rationalium ad poteſtates elevatio.

75. OPerationes præcipuæ, quæ circa quantitates inſtitui poſſunt, ſunt additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio. Interim, præter eas, tum vulgares Arithmetici, cum etiam Algebriſtæ duas alias invexerunt: ſcilicet formationem poteſtatum, quæ velut ſpecies quædam multiplicationis poteſt haberi; & radicum extractionem, quam ad diviſionem non immerito revocare licebit. Itaque, quum oſtenſum ſit hactenus, qua ratione in quantitatibus rationalibus quatuor illæ præcipuæ operationes fieri debeant; ordo nunc poſtulat, ut, quo pacto in iiſdem quantitatibus aliæ duæ iſtæ operationes ſint peragendæ, bre-

viter aperiamus. Ordiemur autem a formatione poteſtatum; nam, ea rite intellecta, extractio radicum nullam plane difficultatem involvet.

I. *Definitio, ordo, ac geneſis poteſtatum.*

76. POteſtatem vocant Algebriſtæ id, quod evadit quantitas aliqua, quum ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & appellant indicem, ſeu exponentem poteſtatis numerum illum, qui quantitati paulo altius adſcriptus deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Ita quantitas a^2, quæ producitur, multiplicando a ſemel per ſe ipſam, vocabitur poteſtas ipſius a; ejuſque index, ſeu exponens dicetur numerus 2. Et ſimiliter quantitas a^3, quæ producitur, multiplicando a bis per ſe ipſam, erit poteſtas alia ejuſdem a; ſed ipſius index, ſeu exponens erit numerus 3.

77. Ratione hujus indicis, ſeu exponentis variæ diſtingui poſſunt poteſtatum ſpecies. Dicemus ſiquidem poteſtatem primam, cujus index eſt unitas; vocabimus poteſtatem ſecundam, cujus index eſt binarius; atque ita quoque poteſtas tertia erit illa, cujus index eſt ternarius; poteſtas quarta, quæ habet quaternarium pro ſuo indice; & ſic deinceps in infinitum. Qua ratione a, ſeu a^1 erit prima poteſtas ipſius a; aa, ſeu a^2 poteſtas ſecunda; a^3 poteſtas tertia; a^4 poteſtas quarta; atque ita de aliis.

78. Algebriſtæ, poſt Diophantum, ſolent has poteſtates propriis ſuis nominibus appellare. Vocant etenim radicem, ſeu latus ipſam pri-

primam poteſtatem, aut potius ipſam illam quantitatem, quæ per repetitam multiplicationem ad ſuperiores evehitur poteſtates. Vocant vero ejus lateris quadratum poteſtatem ſecundam; cubum, poteſtatem tertiam; quadrato-quadratum poteſtatem quartam; quadrato-cubum, poteſtatem quintam; cubo-cubum, poteſtatem ſextam; atque ita deinceps. Sed, quoniam per hæc nomina non adeo fit clara poteſtatum harum idea; ſatius erit, eas ſecundum indices ipſarum, modo jam * expoſito, a ſe mutuo diſtinguere. * art. 77.

79. Illud potius hoc loco ſedulo notandum exiſtimo, quod una, eademque poteſtas, prout ad varias refertur quantitates, varias ſubinde denominationes mereatur. Ita poteſtas, exempli gratia, a^6 dicenda eſt ſexta relate ad a, tertia relate ad a^2, & nonniſi ſecunda relate ad a^3. Nam, ſicuti quantitas a, quinquies per ſe ipſam multiplicata, producit a^6; ſic idem pariter productum habetur, multiplicando per ſe ipſam, ſive bis quantitatem a^2, ſive ſemel tantum quantitatem a^3. Eſt itaque poteſtas nomen relativum; adeoque a quantitate, ad quam refertur, ſuam ſumit denominationem.

80. Jam, quod ſpectat ad geneſim poteſtatum, ex iis, quæ hactenus dicta ſunt, facile quidem ea colligi poteſt. Nam, ſi nulla fiat quantitatis per ſe ipſam multiplicatio, ſed ipſa quantitas capiatur, habebitur poteſtas prima. At vero, ſi quantitas ſemel per ſe ipſam multiplicetur, habebitur poteſtas ſecunda; quemadmodum orietur poteſtas tertia, ſi quantitas multiplicetur bis per ſe ipſam; poteſtas quarta, ſi ter; poteſtas quinta, ſi quater; atque ita deinceps.

ceps. Quocirca, ut quantitas aliqua ad poteſtatem dati nominis elevetur, ſatis erit, toties eam per ſe ipſam multiplicare, quot habet unitates datum nomen, una dempta.

81. Hinc, quum multiplicatio in rationalibus ſimplicibus nullam difficultatem involvat, facile erit, ad quamcumque poteſtatem eas attollere. Ita quadratum, ſeu ſecunda poteſtas quantitatis a^2b eſt a^4b^2; quandoquidem a^4b^2 producitur, multiplicando a^2b ſemel per ſe ipſam. Pariterque cubus, ſeu tertia poteſtas quantitatis ac^2 eſt a^3c^6; nam, multiplicando quantitatem ac^2 bis per ſe ipſam, producitur a^3c^6. In rationalibus autem compoſitis repetita multiplicatio nonnihil difficultatis admittit. Unde, pro elevandis iis ad datam quamcumque poteſtatem, aliam hic methodum afferemus.

II. *Formatio quadrati, ſeu ſecundæ poteſtatis.*

82. UT igitur quælibet rationalis compoſita ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem multo facilius elevetur, quam eam ſemel per ſe ipſam multiplicando; noſſe prius oportet elementa quadrati, quod fit ex quantitate, quæ duabus ex partibus coaleſcit. Sciendum eſt ergo, quadratum talis quantitatis componi ex quadratis partium, & ex duplo ejus, quod producitur ex mutua earum partium multiplicatione. Quod ſane theorema, ipſius multiplicationis ope, facile poteſt oſtendi. Nam, multiplicando $a+b$ per $a+b$, producitur $a^2+2ab+b^2$: quod quidem productum continet

qua-

quadrata partium a, & b, duplumque ejus, quod producitur, multiplicando a per b.

83. Hoc poſito theoremate, quod geometrice demonſtratur ab Euclide propoſitione quarta ſecundi libri ſuorum Elementorum; facile modo erit, quamcumque compoſitam rationalem ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem attollere. Nam primo, ſi quantitas duabus tantum partibus conſtet, ſumenda ſunt quadrata earum partium, duplumque ejus, quod producitur ex mutua earundem partium multiplicatione. Quod ſi vero quantitas tres partes habeat, conſiderentur priores duæ, velut una, pariterque capiatur quadratum, tam hujus, quam partis alterius, una cum duplo ejus, quod oritur, ducendo priores duas in partem tertiam. Neque aliter fieri debet, ſi oblata quantitas ex quatuor, aut pluribus partibus conſtet.

84. Ita, ſi rationalis compoſita, ad quadratum elevanda, ſit $a + b$; fiet quadratum $a^2 + 2ab + b^2$. Sed, ſi ad quadratum elevanda ſit quantitas $a + b + c$, quæ tribus ex partibus conſtat; primo fiat quadratum ex duabus prioribus $a + b$, velut una conſideratis, quod erit $a^2 + 2ab + b^2$; deinde bis capiatur productum ex iiſdem partibus $a + b$, ductis in partem tertiam c, nimirum $2ac + 2bc$; denique fiat quadratum c^2 ex parte tertia c. Jamque, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ quadratum propoſitæ quantitatis $a + b + c$.

85. Quod ſi porro ad quadratum ſit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus conſtat; primo fiat quadratum ex

pri-

primis tribus $a + b + c$, tamquam unica conſideratis, quod erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; tum ſumatur duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione earundem partium $a + b + c$ in partem quartam d, nimirum $2ad + 2bd + 2cd$; denique fiat quadratum d^2 ex parte quarta d. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$ quadratum propoſitæ quantitatis $a + b + c + d$.

86. Fieri autem poteſt, ut aliqua ex partibus propoſitæ quantitatis ſigno — afficiatur. Quare notetur hoc loco velim, quadrata ipſarum partium ſemper quidem afficienda eſſe ſigno +, quomodocunque partes illæ ſint affectæ; producta vero alia tunc quidem affici debere ſigno +, quum eadem ſunt ſigna partium, ex quarum multiplicatione oriuntur. Ita quadratum ex $a - b$ erit $a^2 - 2ab + b^2$. Pariterque quadratum ex $a - b - c$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$. Atque ita quoque quadratum ex $a - b + c - d$ erit $a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 - 2ad + 2bd - 2cd + d^2$. Quod quidem ex ipſo opere multiplicationis, ſuperius * tradito, liquet abunde. * *art.* 36.

87. Cæterum ex tradita quadrati compoſitione illud modo inferre licet, quod ſi numero quadrato n^2 addatur duplum ſuæ radicis $2n$ una cum unitate; ſumma $n^2 + 2n + 1$ ſit etiam numerus quadratus, cujus radix unitate una ſuperabit radicem illius; quandoquidem, ſi fiat quadratum ex $n + 1$, erit illud, juxta traditam * regulam, $n^2 + 2n + 1$. Unde facile erit, tabulas componere, quæ contineant quadrata omnium * *art.* 83.

mnium numerorum naturalium. Nam, quadratum unitatis eſt etiam 1, cui ſi addatur duplum ſuæ radicis, hoc eſt 2, una cum ipſa unitate, fiet 4 quadratum binarii. Atque huic porro addito duplo ipſius binarii, hoc eſt 4, una cum unitate, habebitur 9 pro quadrato ternarii. Sicque, ſolius additionis ope, abſque ulla multiplicatione, aliorum omnium numerorum naturalium quadrata ſucceſſive invenire licebit.

III. Formatio cubi, ſeu tertiæ poteſtatis.

88. Similiter, ut quælibet rationalis compoſita ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem multo facilius elevetur, quam eam bis per ſe ipſam multiplicando; noſſe prius oportet elementa cubi, qui fit ex quantitate, quæ duabus ex partibus coaleſcit. Sciendum eſt ergo, cubum talis quantitatis componi ex cubis partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam; ac demum ex triplo ejus, quod naſcitur, multiplicando viciſſim quadratum ſecundæ partis per primam. Quod ſane theorema, ipſius multiplicationis ope, facillime poteſt oſtendi. Nam, ſi quantitas $a + b$ bis per ſe ipſam multiplicetur, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: quod quidem productum continet cubos partium a, & b; triplum ejus, quod producitur, multiplicando a^2 per b; triplumque ejus, quod oritur, multiplicando viciſſim b^2 per a.

89. Hoc poſito theoremate, quod nullo negotio poſſet geometrice oſtendi ad inſtar ejus, quod continetur propoſitione quarta libri ſecun-

cundi Elementorum Euclidis; facile modo erit, quamcumque compoſitam rationalem ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem attollere. Nam primo, ſi quantitas duabus tantum partibus conſtet, fiet ex ipſa quæſitus cubus, capiendo cubos partium; triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam; triplumque ejus, quod naſcitur, multiplicando viciſſim quadratum ſecundæ partis per primam. Quod ſi vero quantitas tres partes habeat, conſiderentur priores duæ velut una; & ſimiliter, factis cubis iſtius, & partis tertiæ, ſumatur, tam triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ex primis duabus per partem tertiam, quam triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum partis tertiæ per priores duas. Neque aliter fiet, ſi oblata quantitas ex quatuor, aut multo pluribus partibus conſtet.

90. Ita, ſi rationalis compoſita, ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem elevanda, ſit $a + b$; erit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Sed, ſi ad cubum elevanda ſit quantitas $a + b + c$, quæ tribus ex partibus conſtat; primo fiat cubus ex duabus primis partibus $a + b$, velut una conſideratis, qui erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; tum ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2$, quadratum duarum primarum partium $a + b$, per partem tertiam c, nimirum $3a^2c + 6abc + 3b^2c$; porro capiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando c^2, quadratum partis tertiæ c, per priores duas $a + b$, ſcilicet $3ac^2 + 3bc^2$; denique fiat cubus c^3 ex parte tertia c. Jamque, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$+ b^3$

$+ b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 +$ c^3 cubus quantitatis propoſitæ $a + b + c$.

91. Quod ſi porro ad cubum ſit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus conſtat; fiat primo ex primis tribus partibus $a + b + c$, tamquam unica conſideratis, cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$; deinde ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, quadratum trium primarum partium $a + b + c$, per partem quartam d, nimirum $3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d$; ad hæc capiatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando d^2, quadratum quartæ partis d, per partes priores $a + b + c$, ſcilicet $3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2$; denique fiat cubus d^3 ex quarta parte d. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$ cubus propoſitæ quantitatis $a + b + c + d$.

92. Fieri autem poteſt, ut aliqua ex partibus propoſitæ quantitatis ſigno $-$ afficiatur. Quare notetur hoc loco velim, cubos ipſarum partium afficiendos eſſe ſemper eodem ſigno, quo ipſæ partes afficiuntur; producta vero illa, quæ oriuntur, multiplicando quadratum unius partis per aliam, tunc demum afficienda eſſe ſigno $-$, quum hæc alia pars ſigno $-$ afficitur; ac demum ea producta, quæ ex trium partium multiplicatione oriuntur, afficienda eſſe tunc tantum ſigno $-$, quum earum partium, vel quælibet, vel una dumtaxat ſigno $-$ affecta re-

pe-

peritur. Ita cubus ex $a - b$ erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Et cubus ex $a - b - c$ erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$. Quod quidem ex ipſo ope-
* art. 36. re multiplicationis, ſuperius * tradito, abunde colligitur.

93. Cæterum ex tradita cubi compoſitione illud modo fit manifeſtum, quod ſi alicui numero cubo n^3 addatur, primo triplum quadrati ſuæ radicis $3n^2$, deinde triplum ipſius radicis $3n$, ac denique unitas; ſumma $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ fit etiam numerus cubus, cujus radix unitate una ſuperabit radicem illius; quandoquidem, ſi fiat
* art. 89. cubus ex $n + 1$, erit ille, juxta traditam * regulam, $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Unde facile erit, tabulas conſtruere, quæ contineant cubos omnes numerorum naturalium. Nam, cubus unitatis eſt etiam 1, cui ſi addatur triplum quadrati ſuæ radicis 3, itemque triplum ipſius radicis, quod eſt ſimiliter 3, ac denique unitas, fiet 8 cubus binarii. Atque huic porro additis, quadrato ſuæ radicis triplicato 12, triplo ipſius radicis 6, nec non unitate, fiet 27 cubus ternarii. Neque aliter aliorum omnium numerorum naturalium cubi poterunt ſucceſſive inveniri.

IV. *Formatio poteſtatum ſuperiorum.*

94. NOn diſſimili methodo poterunt quantitates rationales, utcumque compoſitæ, ad quamvis aliam poteſtatem altiorem attolli. Nam ſatis erit, ipſius multiplicationis ope, ſemel invenire, quos terminos includat quæſita poteſtas, ubi ea ſit ex quantitate, cu-

cujus duæ tantummodo ſunt partes; & eos ſemper terminos aſſumere, quotieſcumque aliqua quantitas compoſita ad eam poteſtatem eſt elevanda: conſiderando primas omnes, velut unam, ubi oblata quantitas ex pluribus, quam duabus, partibus conſtat.

95. Hac ratione, ſi quantitas aliqua ad quadrato-quadratum, ſeu quartam poteſtatem ſit elevanda; conſidero prius, quadrato-quadratum ex quantitate bimembri $a + b$ eſſe $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, atque adeo componi ex quadrato-quadratis ipſarum partium; ex quadruplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum primæ partis per ſecundam; ex quadruplo ejus, quod oritur, multiplicando viciſſim cubum ſecundæ partis per primam; ac demum ex ſextuplo ejus, quod naſcitur, multiplicando quadratum primæ partis per quadratum ſecundæ. Unde, hujus theorematis ope, facile erit, quamcumque compoſitam rationalem ad quadrato-quadratum attollere.

96. Eadem ratione, ſi quantitas aliqua ad quadrato-cubum, ſeu quintam poteſtatem ſit elevanda; conſiderare prius oportet, quadrato-cubum ex quantitate bimembri $a + b$ eſſe $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, atque adeo componi ex quadrato-cubis ipſarum partium; ex quintuplo ejus, quod fit, multiplicando, tam quadrato-quadratum primæ partis per ſecundam, quam viciſſim quadrato-quadratum ſecundæ partis per primam; ac demum ex decuplo ejus, quod naſcitur, multiplicando, tam cubum primæ partis per quadratum ſecundæ, quam per contrarium cubum ſecundæ partis per

quadratum primæ. Unde, hoc invento theoremate, facili negotio, quælibet quantitas compoſita ad quadrato-cubum elevabitur.

97. Ubi autem hujuſmodi theoremata ſunt detecta, poterunt & alia, ipſis analoga, inveniri, quibus, ſi ad rem foret, facili negotio conſtrui poſſent tabulæ, quæ numerorum omnium naturalium poteſtates ſuperiores contineant. Ita ex theoremate *, quadrato-quadrati compoſitionem oſtendente, perſpicuum eſt, quod ſi alicui numero quadrato-quadrato n^4 addatur, primo quadruplum cubi ſuæ radicis $4n^3$, deinde ſextuplum quadrati ejuſdem radicis $6n^2$, porro quadruplum ipſius radicis $4n$, ac denique unitas; quod, inquam, ſumma omnium $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ ſit etiam numerus quadrato-quadratus, cujus radix unitate una ſuperabit radicem illius. Quare, huic inſiſtendo theoremati, facile erit, numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata ſucceſſive reperire.

* art. 95.

98. Similiter ex theoremate *, quadrato-cubi compoſitionem oſtendente, perſpicuum eſt, quod ſi alicui numero quadrato-cubo n^5 addatur, primo quintuplum quadrato quadrati ſuæ radicis $5n^4$, ſecundo decuplum cubi ejuſdem radicis $10n^3$, tertio decuplum quadrati ex eadem quoque radice $10n^2$, quarto ipſamet radix quintuplicata $5n$, ac denique unitas; quod, inquam, ſumma omnium $n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$ ſit etiam numerus quadrato-cubus, cujus radix unitate una ſuperabit radicem illius. Unde, hujus theorematis beneficio, in proclive erit, numerorum omnium naturalium quadrato-cubos gradatim invenire.

* art. 96.

99.

99. Cæterum nolo hic ſilentio reticere, Recentiorum Algebriſtarum conatus inſignes illud emolumenti nobis peperiſſe, ut uno, eodemque theoremate, generali quadam formula comprehenſo, poſſit quælibet quantitas compoſita ad quamcumque, ut ut altiſſimam, poteſtatem attolli. Sed de generali iſta formula poteſtatum in poſtrema hujus libri ſectione, quæ univerſam poteſtatum theoriam exhibebit, agendum nobis erit. Nam ejus conſtructio pendet ex doctrina numerorum figuratorum, de quibus in ſectione tertia, occaſione ſerierum infinitarum, ſermonem inſtituemus.

V. Fractionum rationalium ad poteſtates elevatio.

100. Quantum ad fractiones rationales, ut eæ ad quamcumque datam poteſtatem eleventur, neceſſe eſt, ad poteſtatem illam attollere, tam numeratores, quam denominatores ipſarum. Sic fractionis $ab:c$ quadratum erit $a^2b^2:c^2$, cubus $a^3b^3:c^3$, quadrato-quadratum $a^4b^4:c^4$, atque ita deinceps. Et eadem ratione fractionis hujus $(ab+ac):(c+d)$ quadratum erit $(a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2):(c^2+2cd+d^2)$, cubus $(a^3b^3+3a^3b^2c+3a^3bc^2+a^3c^3):(c^3+3c^2d+3cd^2+d^3)$, quadrato-quadratum $(a^4b^4+4a^4b^3c+6a^4b^2c^2+4a^4bc^3+a^4c^4):(c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+d^4)$, atque ita de reliquis.

101. Quod ſi fractiones quantitatibus integris adhæreant; per ea, quæ de formatione poteſtatum hactenus dicta ſunt, facile quoque

erit, eas ad quamcumque datam poteſtatem evehere. Sic quadratum ex $a + bc : d$ erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$. Componi namque debet * quadratum iſtud ex quadratis partium, duploque ejus, quod producitur, ex mutua earundem partium multiplicatione. Sed quadratum ex a eſt a^2, quadratum ex $bc : d$ eſt $b^2c^2 : d^2$, duplumque ejus, quod oritur, multiplicando a per $bc : d$ eſt $2abc : d$. Quare erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$ quadratum ex $a + bc : d$.

* art. 82.

102. Sit jam ad quadratum elevanda quantitas $a + bc : d + a^2 : d$. Fiat primo quadratum ex duabus primis partibus, velut una conſideratis, $a + bc : d$, quod erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$; deinde ſumatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando eaſdem duas priores partes $a + bc : d$ per tertiam $a^2 : d$, nimirum $2a^3 : d + 2a^2bc : d^2$; denique fiat quadratum $a^4 : d^2$ ex tertia parte $a^2 : d$. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, fiet $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2 + 2a^3 : d + 2a^2bc : d^2 + a^4 : d^2$ quadratum propoſitæ quantitatis $a + bc : d + a^2 : d$.

103. Eadem ratione cubus ex $a + bc : d$ erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$. Componi namque debet * cubus iſte ex cubis partium; triplo ejus, quod fit, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam; triploque ejus, quod oritur, multiplicando viciſſim quadratum ſecundæ partis per primam. Sed cubus ex a eſt a^3; cubus ex $bc : d$ eſt $b^3c^3 : d^3$; triplum ejus, quod producitur, multiplicando quadratum primæ partis a^2 per ſecundam $bc : d$, eſt $3a^2bc : d$; & triplum ejus, quod gignitur, multiplicando per contrarium quadratum ſecun-

* art. 88.

dæ

dæ partis $b^2c^2 : d^2$ per primam a, eſt $3ab^2c^2 : d^2$. Quare erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$ cubus ex $a + bc : d$.

104. Sit jam ad cubum elevanda quantitas $a + bc : d + a^2 : d$. Primo fiat cubus ex duabus primis partibus, velut una conſideratis, $a + bc : d$, qui erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$; deinde ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum ex duabus primis partibus $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$ per tertiam $a^2 : d$, nimirum $3a^4 : d + 6a^3bc : d^2 + 3a^2b^2c^2 : d^3$; porro capiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando quadratum tertiæ partis $a^4 : d^2$ per priores duas $a + bc : d$, ſcilicet $3a^5 : d^2 + 3a^4bc : d^3$; denique fiat cubus $a^6 : d^3$ ex tertia parte $a^2 : d$. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, fiet $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3 + 3a^4 : d + 6a^3bc : d^2 + 3a^2b^2c^2 : d^3 + 3a^5 : d^2 + 3a^4bc : d^3 + a^6 : d^3$ cubus propoſitæ quantitatis $a + bc : d + a^2 : d$.

105. Cæterum, ut quantitates, quæ fractiones involvunt, facilius ad quamcumque datam poteſtatem attollantur, præſtat, tum fractiones ad eandem denominationem *, cum quantitates integras ad fractiones ejuſdem nominis * reducere. Sic, ut fiat, ſive quadratum, ſive cubus ex $a + b^2 : a + c^2 : d$, reducendæ ſunt, tam fractiones $b^2 : a$, & $c^2 : d$ ad eandem denominationem ad, quam quantitas integra a ad fractionem, cujus denominator ſit etiam ad. Unde, quum quantitas propoſita hoc pacto evadat $(a^2d + b^2d + ac^2) : ad$; erit ejus quidem quadratum $(a^4d^2 + 2a^2b^2d^2 + b^4d^2 + 2a^3c^2d +$

* art. 56.

* art. 54.

 $2ab^2c^2d$

$2ab^2c^2d + a^2c^4) : a^2d^2$; ejus vero cubus ($a^6d^3 + 3a^4b^2d^2 + 3a^2b^4d^3 + b^6d^3 + 3a^5c^2d^2 + 6a^3b^2c^2d^2 + 3ab^4c^2d^2 + 3a^4c^4d + 3a^2b^2c^4d + a^3c^6) : a^3d^3$.

CAPUT V.

Extractio radicum ex rationalibus.

106. Quemadmodum, quum quantitas aliqua ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur, id, quod producitur, vocatur * poteſtas illius quantitatis; ita ipſa illa quantitas, ex cujus repetita multiplicatione poteſtas oritur, vocatur radix ejus poteſtatis. Et, quemadmodum poteſtates diſtinguuntur * in ordines, ſecundum indices, ſeu exponentes ipſarum; ita quoque radices earundem poteſtatum, habita illorum exponentium ratione, poſſunt in varios ordines diſtingui.

* *art.* 76.

* *art.* 77.

107. Nimirum, ſicuti poteſtas prima eſt illa, cujus index eſt unitas; poteſtas ſecunda, ſeu quadratum, cujus index eſt numerus binarius; peteſtas tertia, ſeu cubus, cujus index eſt numerus ternarius; atque ita deinceps. Ita quoque dici poteſt radix prima, quæ refertur ad poteſtatem primam; radix ſecunda, ſeu quadrata, quæ refertur ad quadratum, ſeu poteſtatem ſecundam; radix tertia, ſeu cubica, quæ refertur ad cubum, ſeu poteſtatem tertiam; atque ita deinceps.

108. Jam, radices extrahere ex poteſtatibus rationalium ſimplicium, problema eſt, quod

nul-

nullam difficultatem involvit. Nam, ſicuti quantitas *ab*, multiplicata ſemel per ſe ipſam, producit quadratum a^2b^2; ſic, extracta radice quadrata ex a^2b^2, proveniet rurſus *ab*. Et inſuper, ſicuti quantitas *ab*, bis ducta in ſe ipſam, producit cubum a^3b^3; ita, extracta radice cubica ex a^3b^3, orietur denuo eadem quantitas *ab*.

109. Verumtamen, quum poteſtates ad rationales compoſitas referuntur, pluresque adeo terminos involvunt, radicum extractio non ita facilis deprehenditur. Quocirca, ut methodus eas extrahendi probe intelligatur; primo illam experiemur in extractione radicis quadratæ; deinde ejus periculum faciemus in extractione radicis cubicæ; ac denique, quo pacto eadem methodus extractioni aliarum radicum applicari debeat, breviter oſtendemus.

I. Extractio radicis quadratæ.

110. UT ex rationali, quantumvis compoſita, quadrata radix extrahatur, meminiſſe oportet, quadratum quantitatis, cujus duæ ſunt partes, conſtare * ex quadratis partium, duploque ejus, quod producitur ex mutua earundem partium multiplicatione. Hinc etenim fit, ut ſi radix propoſitæ quantitatis duabus tantum partibus conſtet; prima quidem invenienda ſit, extrahendo radicem quadratam ex primo termino, quem oportet eſſe quadratum perfectum; alia vero, dividendo terminum ſequentem per duplum partis jam inventæ.

* *art.* 82.

111. Hac ratione, ad inveniendas partes duas radicis, quæ refertur ad quadratum $a^2 + 2ab + b^2$; elicio primum radicem quadratam ex priore termino a^2, quem liquet eſſe quadratum perfectum; tum per duplum ejus radicis divido terminum ſequentem $+ 2ab$. Et quoniam, radix illa eſt a, quotiens vero hujus diviſionis eſt $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque, ut inveniantur partes duæ radicis, quæ refertur ad quadratum $9a^2 - 24ac + 16c^2$; extraho primum radicem quadratam ex priore termino $9a^2$; deinde per duplum ejus radicis divido terminum ſequentem $- 24ac$. Quumque radix illa ſit $3a$, & quotiens hujus diviſionis ſit $-4c$; erunt $3a - 4c$ partes inveniendæ.

112. Extracta autem radice quadrata ex priore termino propoſitæ quantitatis, delendus eſt terminus ille, nec amplius ejus habenda eſt ratio. Sed, diviſo termino ſequente per duplum ejus radicis, ſubducendum eſt ex eadem propoſita quantitate, & productum ex duplo illo per inventum quotientem, & quadratum ipſius quotientis. Nam, ſemper ac quantitas propoſita eſt quadratum perfectum, ejuſque radix duabus tantum partibus conſtat; per traditam quadrati * compoſitionem, neceſſe eſt, ut, facta ea ſubtractione, nihil amplius remaneat.

* art. 82.

113. Quod ſi contingat, ſubtractione illa peracta, aliquid ſupereſſe; vel propoſita quantitas non erit quadratum perfectum; vel ejus radix, præter duas jam inventas, partem aliam admittet. Hæc vero, ſi adſit, comperietur, conſiderando inventas partes, velut unam, & dividendo priores duos terminos reſidui per duplum ip-

ipſarum. Sed, invento iſto quotiente, qui pro parte tertia radicis haberi debet, ſubducendum eſt ex illo reſiduo, tam id, quod oritur, multiplicando duplum primarum partium per inventum quotientem, quam quadratum ejuſdem quotientis. Nam, ſi forte, hac facta ſubductione, aliud quidpiam adhuc ſupererit, fieri poteſt, ut quæſita radix quartam, quintamve partem admittat: quæ tamen omnes eodem ſemper artificio reperientur.

114. Ita, ſi extrahenda ſit quadrata radix ex $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, extraho primum illam ex priore termino a^2; eoque deleto, divido deinde terminum ſequentem $+ 2ab$ per $2a$, duplum inventæ radicis. Jam, multiplicato deinceps diviſionis hujus quotiente $+b$ per duplum illud, factoque quadrato ejuſdem quotientis, oritur quantitas $+ 2ab + b^2$, quæ ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino multata, relinquit $+ 2ac + 2bc + c^2$. Hinc conſidero partes radicis jam inventas $a + b$, velut unam, & per duplum ipſarum $2a + 2b$ divido ulterius priores duos terminos illius reſidui $+ 2ac + 2bc$. Quumque oriatur quotiens $+ c$, cujus quadratum c^2 additum ei, quod producitur, multiplicando $2a + 2b$ per $+ c$, dat quantitatem $2ac + 2bc + c^2$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, radicem propoſitæ quantitatis eſſe $a + b + c$.

115. Similiter, ſi extrahenda ſit quadrata radix ex quantitate $9a^2 - 24ac + 16c^2 - 30ad + 40cd + 25d^2$, elicio primum illam ex priore termino $9a^2$; eoque deleto, divido deinde terminum ſequentem $- 24ac$ per $6a$, duplum in-

inventæ radicis. Jam, multiplicato poſtea diviſionis hujus quotiente $-4c$ per duplum illud, factoque quadrato ejuſdem quotientis, oritur quantitas $-24ac+16c^2$, quæ ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino minuta, relinquit $-30ad+40cd+25d^2$. Quare conſidero partes radicis jam inventas $3a-4c$, velut unam, & per duplum ipſarum $6a-8c$ divido deinceps priores duos terminos illius reſidui $-30ad+40cd$. Quumq; oriatur quotiens $-5d$, cujus quadratum $25d^2$ additum ei, quod naſcitur, multiplicando $6a-8c$ per $-5d$, exhibet quantitatem $-30ad+40cd+25d^2$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, radicem propoſitæ quantitatis eſſe $3a-4c-5d$.

II. Extractio radicis cubicæ.

116. Similiter, ut ex rationali, quantumvis compoſita, cubica radix extrahatur, meminiſſe oportet, cubum quantitatis, cujus duæ ſunt partes, conſtare * ex cubis partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam; & ex triplo ejus, quod producitur, multiplicando viciſſim quadratum ſecundæ partis per primam. Hinc etenim fit, ut ſi radix propoſitæ quantitatis duabus tantum partibus conſtet; prima quidem invenienda ſit, extrahendo radicem cubicam ex primo termino, quem oportet eſſe cubum perfectum; alia vero, dividendo terminum ſequentem per quadratum partis jam inventæ triplicatum.

* *art.* 88.

117. Hac ratione, ad inveniendas partes

duas

duas radicis, quæ refertur ad cubum $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; elicio primum radicem cubicam ex priore termino a^3, quem liquet eſſe cubum perfectum; tumq; per quadratum ejus radicis triplicatum divido terminum ſequentem $+ 3a^2b$. Et quoniam radix illa eſt a, quotiens vero hujus diviſionis eſt $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque, ut inveniantur partes duæ radicis, quæ refertur ad cubum $27a^3 - 54a^2c + 36ac^2 - 8c^3$; extraho primum radicem cubicam ex priore termino $27a^3$; deinde per quadratum ejus radicis triplicatum divido terminum ſequentem $- 54a^2c$. Quumque radix illa ſit $3a$, & quotiens hujus diviſionis ſit $- 2c$; erunt $3a - 2c$ partes inveniendæ.

118. Extracta autem radice cubica ex priore termino propoſitæ quantitatis, delendus eſt terminus ille, nec amplius ejus habenda eſt ratio. Sed, diviſo termino ſequente per quadratum ejus radicis triplicatum, ſubducere oportet ex eadem propoſita quantitate; primo id, quod oritur, multiplicando quadratum illud triplicatum per inventum quotientem; deinde id, quod producitur, multiplicando viciſſim quadratum inventi quotientis triplicatum per radicem antea extractam; ac denique cubum ejuſdem quotientis. Nam, ſemper ac quantitas propoſita eſt cubus perfectus, ejuſque radix duabus tantum partibus conſtat; per traditam cubi * compoſitionem, neceſſe eſt, ut, ea facta ſubtractione, nihil amplius remaneat. * art. 88.

119. Quod ſi contingat, ſubtractione illa peracta, aliquid ſupereſſe; vel propoſita quantitas non erit cubus perfectus; vel ejus radix,

præ-

præter duas jam inventas, partem aliam admittet. Hæc vero, ſi adſit, comperietur, conſiderando inventas partes, velut unam, & dividendo priores tres terminos reſidui per quadratum ex iis triplicatum. Sed, invento iſto quotiente, qui pro parte tertia radicis haberi debet, ſubducere oportet ex illo reſiduo, primo id, quod oritur, multiplicando quadratum primarum partium triplicatum per inventum quotientem; tum id, quod naſcitur, multiplicando viciſſim quadratum inventi quotientis triplicatum per partes duas priores; ac deniq; cubum ejuſdem quotientis. Nam, ſi forte, hac facta ſubductione, aliud quidpiam adhuc ſupererit, fieri poteſt, ut quæſita radix quartam, quintamve partem admittat: quæ tamen omnes eodem ſemper artificio reperientur.

120. Ita, ſi extrahenda ſit radix cubica ex $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$, extraho primum illam ex priore termino a^3; eoque deleto, divido deinde terminum ſequentem $+ 3a^2b$ per $3a^2$, quadratum inventæ radicis triplicatum. Jam quotiens hujus diviſionis eſt $+ b$, & multiplicando, tam $3a^2$ per b, quam $3b^2$ per a, oritur quantitas $3a^2b + 3ab^2$, quæ una cum b^3, cubo ipſius b, ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino multata, relinquit $3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Quare conſidero partes radicis jam inventas $a + b$, velut unam, & per quadratum ex iis triplicatum $3a^2 + 6ab + 3b^2$ divido deinceps priores tres terminos illius reſidui $3a^2c + 6abc + 3b^2c$. Quumque oriatur quotiens $+ c$, cujus cubus c^3 adſciſcens, tum

id,

id, quod oritur, multiplicando $3a^2 + 6ab + 3b^2$ per c, cum id, quod gignitur, multiplicando $3c^2$ per $a + b$, dat quantitatem $3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$, quæ ſubtracta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, radicem propoſitæ quantitatis eſſe $a + b + c$.

121. Similiter, ſi extrahenda ſit radix cubica ex $27a^3 - 54a^2c + 36ac^2 - 8c^3 - 54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$, elicio primum illam ex priore termino $27a^3$; eoque deleto, divido deinde terminum ſequentem $- 54a^2c$ per $27a^2$, quadratum inventæ radicis triplicatum. Jam quotiens hujus diviſionis eſt $- 2c$, & multiplicando, tam $27a^2$ per $- 2c$, quam $12c^2$ per $3a$, oritur quantitas $- 54a^2c + 36ac^2$, quæ una cum $- 8c^3$, cubo ipſius $- 2c$, ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino minuta, relinquit $- 54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$. Hinc conſidero partes radicis jam inventas $3a - 2c$, velut unam, & per quadratum ex iis triplicatum $27a^2 - 36ac + 12c^2$ divido ulterius priores tres terminos illius reſidui $- 54a^2d + 72acd - 24c^2d$. Quumque oriatur quotiens $- 2d$, cujus cubus $- 8d^3$ adſciſcens, tam id, quod naſcitur, multiplicando $27a^2 - 36ac + 12c^2$ per $- 2d$, quam id, quod producitur, multiplicando $12d^2$ per $3a - 2c$, dat quantitatem $- 54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$, quæ ſubtracta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, radicem propoſitæ quantitatis eſſe $3a - 2c - 2d$.

III.

III. *Extractio aliarum radicum.*

122. QUantum ad radices altioris ordinis, ut generalem pro iis extrahendis methodum tradamus, notare prius oportet, quod quælibet poteſtas quantitatis, cujus duæ ſunt partes, in primo quidem termino continet poteſtatem non diſſimilem partis prioris, in ſecundo vero termino complectitur productum ex poteſtate, uno gradu minore, ejuſdem partis per ſecundam, toties ſumptum, quot ſunt unitates in exponente poteſtatis, de qua agitur. Hinc etenim fit, ut ſi radix propoſitæ quantitatis, duabus tantum partibus conſtet; prima quidem invenienda ſit, extrahendo quæſitam radicem ex primo termino, quem oportet eſſe poteſtatem perfectam ejus ordinis, de quo eſt quæſtio; alia vero, dividendo terminum ſequentem per poteſtatem, uno gradu minorem, partis jam inventæ, toties ſumptam, quot exponens poteſtatis, de qua agitur, habet unitates.

123. Hac ratione, ut inveniantur partes duæ radicis, quæ refertur ad quadrato-quadratum $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; extraho primum radicem quadrato-quadratam ex priore termino a^4, quem liquet eſſe quadrato-quadratum perfectum; deinde per cubum ejus radicis quadruplicatum divido terminum ſequentem $+ 4a^3b$. Et quoniam radix illa eſt a, quotiens autem hujus diviſionis eſt $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque, ut inveniantur partes duæ radicis, quæ refertur ad quadrato-cubum $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4$

$+ 5ab^4 - b^5$; elicio primum radicem quadrato-cubicam ex priore termino a^5, quem patet eſſe quadrato-cubum perfectum; tum per quadrato-quadratum ejus radicis quintuplicatum divido terminum ſequentem $- 5a^4b$. Quumque radix illa ſit a, quotiens autem hujus diviſionis ſit $- b$; erunt $a - b$ partes inveniendæ.

124. Jam, extracta quæſita radice ex priore termino propoſitæ quantitatis, delendus eſt terminus ille, nec amplius ejus habenda eſt ratio. Sed, diviſo termino ſequente per ejus radicis poteſtatem, uno gradu minorem, toties ſumptam, quot exponens poteſtatis, de qua agitur, habet unitates, ſubducendi ſunt ex propoſita quantitate omnes alii termini, qui eſſe debent in poteſtate quantitatis, cujus duæ ſunt partes. Et ſiquidem, hac facta ſubductione, nihil amplius remaneat, erit quantitas propoſita poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, ejuſque radix ex duabus partibus jam inventis conſtabit. Quod ſi vero aliquid ſupererit; vel propoſita quantitas non erit poteſtas perfecta; vel ejus radix, præter duas jam inventas, partem aliam admittet; quæ quidem, ſi adſit, conſiderando compertas partes, velut unam, eruetur eadem omnino ratione, qua ſecunda pars radicis eruta fuit.

125. Sic quadrato-quadratum quantitatis, cujus duæ ſunt partes, conſtat * ex quadrato-quadratis ipſarum partium; ex quadruplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum primæ partis per ſecundam; ex quadruplo ejus, quod oritur, multiplicando viciſſim cubum ſecundæ partis per primam; ac demum ex ſextuplo ejus, quod

* art. 95.

quod naſcitur, multiplicando quadratum primæ partis per quadratum ſecundæ. Unde, inventa per diviſionem ſecunda parte radicis, ſubtrahi debet ex quantitate propoſita; primo id, quod oritur, multiplicando cubum primæ partis quadruplicatum per ſecundam; tum id, quod fit, multiplicando quadratum primæ partis ſextuplicatum per quadratum ſecundæ; porro id, quod gignitur, multiplicando cubum ſecundæ partis quadruplicatum per primam; ac denique quadrato-quadratum, quod fit ex parte ſecunda.

126. Similiter, quadrato-cubus quantitatis, cujus duæ ſunt partes, componitur * ex quadrato-cubis ipſarum partium; ex quintuplo, tum ejus, quod fit, multiplicando quadrato-quadratum primæ partis per ſecundam, cum ejus, quod oritur, multiplicando viciſſim quadrato-quadratum ſecundæ partis per primam; ac demum ex decuplo, tam ejus, quod producitur, multiplicando cubum primæ partis per quadratum ſecundæ, quam ejus, quod gignitur, multiplicando viciſſim cubum ſecundæ partis per quadratum primæ. Unde, inventa per diviſionem ſecunda parte radicis, ſubtrahi debet ex quantitate propoſita; primo id, quod fit, multiplicando quintuplum quadrato-quadrati primæ partis per ſecundam; tum id, quod producitur, multiplicando decuplum cubi primæ partis per quadratum ſecundæ; deinde id, quod oritur, multiplicando decuplum cubi ſecundæ partis per quadratum primæ; porro id, quod naſcitur, multiplicando quintuplum quadrato-quadrati ſecundæ partis per primam; ac denique quadrato-cubus, qui fit ex parte ſecunda.

* art. 96.

IV.

IV. *Extractio radicum ex fractionibus rationalibus.*

127. QUemadmodum fractiones rationales ad quamcumque datam poteſtatem attolluntur, elevando * ad eam, tam numeratores, quam denominatores ipſarum; ita, ut ex aliqua fractione rationali radix quæcumque extrahatur, oportebit, radicem illam elicere, tum ex numeratore, cum ex denominatore datæ fractionis. Qua ratione $ab:c$ erit, tam radix quadrata fractionis $a^2b^2:c^2$, quam radix cubica alterius hujus fractionis $a^3b^3:c^3$. Atque ita quoque $(ab+ac):(c+d)$ erit, tum radix quadrata fractionis $(a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2):(c^2+2cd+d^2)$, cum radix cubica alterius hujus fractionis $(a^3b^3+3a^3b^2c+3a^3bc^2+a^3c^3):(c^3+3c^2d+3cd^2+d^3)$. * art. 100.

128. Sed interdum, ut radices ex fractionibus extrahi poſſint, oportet prius, per regulam ſuperius * traditam, fractiones illas ad minimos terminos reducere. Ita, ex fractione $4a^3b^2:ac^3$ quadrata radix extrahi nequit, ut quæ, nec ex numeratore $4a^3b^2$, nec ex denominatore ac^3 extrahi poteſt; ſed, ſi ea ad minimos terminos reducatur, facile erit, ex ipſa quadratam radicem elicere; nam, quum fiat $4a^2b^2:c^2$, erit ejus quadrata radix $2ab:c$. Similiter, ex fractione $16a^4c^3:2ab^3$ radix cubica extrahi non poteſt; ſed, quia reducta ad ſimpliciorem ſuam expreſſionem fit $8a^3c^3:b^3$, invenietur pro ejus radice cubica fractio alia $2ac:b$. * art. 57.

129. Quod, ſi fractiones rationales quan-

titatibus integris, ſimiliter rationalibus, adhæreant; per ea, quæ de extractione radicum hactenus dicta ſunt, facile quoque erit, ex iis, quum fieri poteſt, quamcumque radicem extrahere. Ita, ſi extrahenda ſit quadrata radix ex $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$, elicio primum illam ex priore termino a^2; eoque deleto, divido terminum ſequentem $+ 2abc : d$ per $2a$, duplum ejus radicis. Jam ex hac diviſione oritur quotiens $+ bc : d$, cujus quadratum $b^2c^2 : d^2$ additum ei, quod oritur, multiplicando $2a$ per $+ bc : d$, exhibet quantitatem $+ 2abc : d + b^2c^2 : d^2$. Unde, quia hæc quantitas ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino multata, relinquit nihil; concludo, radicem quadratam propoſitæ quantitatis eſſe $a + bc : d$.

130. Similiter, ſi extrahenda ſit radix cubica ex $a^3 - 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 - b^3c^3 : d^3$, elicio primum eam ex priore termino a^3: quo quidem deleto, divido terminum ſequentem $- 3a^2bc : d$ per $3a^2$, quadratum ejus radicis triplicatum. Jam ex hac diviſione oritur quotiens $- bc : d$, cujus cubus $- b^3c^3 : d^3$ adſciſcens, tam id, quod oritur, multiplicando $3a^2$ per $- bc : d$, quam id, quod producitur, multiplicando $3b^2c^2 : d^2$ per a, dat quantitatem $- 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 - b^3c^3 : d^3$. Unde, quia quantitas iſta ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino multata, relinquit nihil; concludo, radicem cubicam propoſitæ quantitatis eſſe $a - bc : d$.

131. Cæterum, ut ex quantitatibus, fractiones involventibus, facilius radices extrahantur, præſtat, tum fractiones ad eandem * deno-

* art. 56.

nominationem, cum quantitates integras ad fractiones ejuſdem * nominis reducere. Ita, ad * art. 54. extrahendam quadratam radicem ex $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$, reducendæ ſunt, tam fractiones $2abc : d$, & $b^2c^2 : d^2$ ad eandem denominationem d^2, quam quantitas integra a^2 ad fractionem, cujus denominator ſit etiam d^2. Unde, quum loco propoſitæ quantitatis habeatur $(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) : d^2$, fiet ejus radix * quadrata * art. 127. $(ad + bc) : d$. Atque ita quoque invenietur, radicem cubicam hujus quantitatis $a^3 - 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 - a^3b^3 : d^3$ eſſe $(ad - bc) : d$; quum reducatur quantitas illa ad hanc aliam $(a^3d^3 - 3a^2bcd^2 + 3ab^2c^2d - a^3b^3) : d^3$.

V. Geneſis quantitatum incommenſurabilium.

132. Vulgo duæ quantitatum ſpecies diſtingui ſolent: ſcilicet commenſurabiles, ſeu rationales; & incommenſurabiles, ſeu irrationales. Has duas quantitatum ſpecies conſiderarunt Veteres dumtaxat in Arithmetica, ubi quantitates per numeros deſignantur. Quem in finem vocarunt quantitates commenſurabiles, ſeu arithmetice rationales, quæ numeris poſſunt deſignari; vocarunt vero quantitates incommenſurabiles, ſeu arithmetice irrationales, quæ nullis plane numeris exprimi poſſunt.

133. Sed conſiderarunt Recentiores, eandem quantitatum diſtinctionem etiam in Geometria locum habere. Quantitates enim, quemadmodum in Arithmetica per numeros, ita in Geometria per rectarum longitudines deſignan-

tur. Unde, ſicuti dicuntur arithmetice rationales, quæ numeris poſſunt deſignari; & arithmetice irrationales, quæ nullis numeris exprimi queunt. Ita quoque dicendæ ſunt geometrice rationales, quæ per longitudines rectarum exprimi poſſunt; & geometrice irrationales, quæ nullis queunt rectis definiri.

134. Atque hac quantitatum, cum in Arithmetica, tum in Geometria admiſſa diſtinctione; jam problemata omnia mathematica licebit in tria ſumma genera diſpeſcere. Unum namq; genus erit illorum, in quibus quantitates quęſitę numeris perinde, ac lineis rectis poterunt deſignari. Alterum genus erit eorum, in quibus quantitates quæſitæ, non quidem ullis numeris, ſed per ſolas lineas rectas exprimi poterunt. Tertium genus complectetur tandem problemata illa, in quibus quæſitas quantitates, neque ullis numeris, neque ullis rectis deſignare licebit.

135. Dari autem quantitates, quæ nec numeris, nec rectis ullis exprimi poſſunt; nemo ſane in dubium revocabit. Si enim, data circuli diametro, quæratur longitudo ſuæ circumferentiæ; eam, nec per numerum aliquem, nec per rectam ullam licebit definire. Et ſimiliter ſi, data quavis circuli ſubtenſa, quæratur longitudo arcus, ad quem ſubtenſa illa refertur; nulla erit aſſignabilis recta, per quam ea poſſit exhiberi. Unde æquum eſt, ut problemata, in quibus hujuſmodi quæruntur quantitates, ad peculiare quoddam genus referantur.

136. Unde fiat, ut in Geometria quædam quantitates ſint geometrice rationales, quædam geometrice irrationales; non eſt hujus loci defini-

finire. Tantum hic indicabimus, unde nam in Arithmetica quantitates incommenſurabiles oriantur. Nimirum oriuntur hujuſmodi quantitates in Arithmetica, quum radicem oportet extrahere ex numero aliquo, qui non eſt poteſtas perfecta ejus ordinis, quem extrahenda radix oſtendit. Sic, quia nullus numerus poteſt inveniri, qui ductus in ſe ipſum producat numerum denarium; inde eſt, ut quadrata radix numeri denarii ſit quantitas incommenſurabilis, ſeu arithmetice irrationalis.

137. Jam ex eodem fonte oriuntur etiam quantitates incommenſurabiles in Algebra, ubi non numeris, ſed Alphabeti litteris, quantitates ipſæ deſignantur. Nam, ſi quæratur quadrata radix quantitatis ab, liquido patet, nullam adeſſe quantitatem iiſdem litteris a, & b ſic exprimibilem, ut ducta ſemel in ſe ipſam producat ab. Quocirca, quemadmodum quadrata radix numeri denarii eſt quantitas incommenſurabilis in Arithmetica; ſic quoque in Algebra quadrata radix ipſius ab, velut quantitas incommenſurabilis debet haberi.

VI. Ratio deſignandi quantitates incommenſurabiles.

138. QUotieſcumque ex aliqua quantitate optata radix extrahi non poteſt, deſignatur ea, præfigendo quantitati ſignum iſtud $\surd$, quod hac de cauſa ſignum radicale appellatur. Hincque factum, ut quantitates incommenſurabiles, tam in Arithmetica, quam in Algebra, dicerentur quoque quantitates radicales. Uſurpa-

tur vero tale ſignum, ad deſignandam quamcumque radicem, ſive quadratam, ſive cubicam, ſive alterius cujuſque poteſtatis. Sed, ad illam diſtinguendam, adſcribitur communiter ſigno radicali numerus, qui eſt index, ſeu exponens poteſtatis, de qua agitur, ſive radicis extrahendæ.

139. Ita, quia exponens quadrati, ſeu ſecundæ poteſtatis eſt numerus binarius; erit $\sqrt{}^2$ ſignum radicis quadratæ. Et ſimiliter, quia exponens cubi, ſeu tertiæ poteſtatis eſt numerus ternarius; erit $\sqrt{}^3$ ſignum radicis cubicæ. Qua ratione quadrata radix, quæ extrahi non poteſt ex quantitate ab, deſignabitur per $\sqrt{}^2 ab$. Pariterque radix cubica, quæ elici nequit ex quantitate abc, exhibebitur per $\sqrt{}^3 abc$. Et par eſt ratio radicum altioris ordinis, quæ ex propoſitis quantitatibus elici non poſſunt.

140. Interim notare licet hoc loco, invaluiſſe morem apud Algebriſtas, ut quotieſcumque alicui quantitati ſignum radicale ſimpliciter apponitur, de quadrata radice intelligi debeat. Ita $\sqrt{ab}$ deſignat radicem quadratam, quæ extrahi nequit ex quantitate ab. Et ſimiliter $\sqrt{10}$ oſtendit radicem quadratam, quæ extrahi non poteſt ex numero denario. Unde, morem iſtum nos etiam ſervantes, tunc demum ſigno radicali indicem, ſeu exponentem extrahendæ radicis adſcribemus, quotieſcumq; ipſa radix refertur ad poteſtatem, quæ eſt altioris ordinis, quam quadratum.

141. Præſtat hic etiam adnotare, quod ubi quantitas rationalis, unde radix extrahi nequit, eſt compoſita; tunc, ad deſignandam radicem extrahendam, non modo præfigere oportet quantitati ſignum radicale, verum etiam paren-

rentheſi quantitatem ipſam includere. Qua ratione quadrata radix quantitatis $ab + ac$ deſignanda eſt per $\surd(ab + ac)$. Et ſimiliter radix cubica quantitatis $a^2b + a^2c$ deſignabitur per $\surd^3(a^2b + a^2c)$. Unde expreſſio iſta $\surd ab + c$ non aliud in poſterum ſignificabit, quam rationalem c additam radicali $\surd ab$; ſicut hæc alia $\surd ab - c$ non aliud deinceps oſtendet, quam rationalem c demptam ex radicali $\surd ab$.

142. Hoc idem præſtabimus quoque, quum extrahenda eſt optata radix ex fractione aliqua rationali, eaque ex nulla ejus parte, hoc eſt, nec ex numeratore, nec ex denominatore elici poteſt. Ita radix quadrata fractionis $abc : d$ erit $\surd(abc : d)$. Et ſimiliter radix cubica fractionis $a^2b^2 : c$ erit $\surd^3(a^2b^2 : c)$. Sed, ſi radix extrahi quidem poteſt ex una fractionis parte, ſed non item ex parte alia; tunc ſignum radicale adſcribemus ei tantummodo parti, unde radix extrahi nequit. Sic quadrata radix fractionis $c^4 : ab$ erit $c^2 : \surd ab$. Pariterque radix cubica fractionis $b^3c^3d^3 : a^2$ erit $\surd^3 b^3c^3d^3 : a$.

143. Etſi autem in poſterum, quum radix, nec ex numeratore, nec ex denominatore extrahi poteſt, præfigemus ſignum radicale univerſæ fractioni, parentheſi incluſæ; fatemur tamen, poſſe ad hoc opus adhiberi etiam duo ſigna radicalia, & unum quidem numeratori, alterum vero denominatori ſeorſim adſcribi. Ita quadrata radix fractionis $abc : d$ exprimi poterit, tam per $\surd(abc : d)$, quam per $\surd abc : \surd d$. Et ſimiliter radicem cubicam, extrahendam ex fractione $a^2b^2 : c$ deſignare licebit, non modo per $\surd^3(a^2b^2 : c)$, verum etiam per $\surd^3 a^2b^2 : \surd^3 c$.

SECTIO II.

De Calculo Quantitatum Radicalium.

144. Tradito calculo quantitatum rationalium, gradum nunc facimus ad calculum illarum, quæ dicuntur radicales. De hujuſmodi vero calculo paulo accuratius agendum nobis eſt; quia de eo nihil ferme traditur in Arithmetica vulgari. Quem in finem, non modo in quantitatibus litteralibus, verum etiam in quantitatibus numericis, lubet regularum ejus periculum facere.

145. Principio autem ſciendum eſt, quod ſicuti, ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum rationalis a, ſcribitur * $2a$, $3a$, $4a$; ſic, ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum radicalis $\surd ab$, ſcribendum ſit $2\surd ab$, $3\surd ab$, $4\surd ab$. Unde, quemadmodum $2a + 3a$ idem * ſunt, ac $5a$; ita quoque $3\surd ab + \surd ab$, ſive etiam $3\surd ab + 1\surd ab$ idem erunt, ac $4\surd ab$; & $5\surd ab - 3\surd ab$ idem, ac $2\surd ab$.

* art. 4.

* art. 7.

146. Quin etiam, quemadmodum, ſi rationalis a toties accipienda ſit, quot ſunt partes in c, ſcribitur * ca; ita quoque $c\surd ab$ deſignabit radicalem $\surd ab$ toties ſumptam, quot ſunt partes in c. Qua ratione multiplicabitur radicalis quæcumque per quamlibet rationalem, ſcribendo illam poſt iſtam, nullo ſigno interjecto. Ut, ad multiplicandum $\surd bc$ per a, ſcribo $a\surd bc$. Et ſimi-

* art. 15.

militer ; ad multiplicandum $\surd 10$ per 3, ſcribo $3\surd 10$.

147. Quod ſi autem alicujus radicalis, ut $\surd ab$, ſumendæ eſſent duæ tertiæ partes, tres quartæ partes, aut etiam una quinta pars; tunc, vitandæ confuſionis ergo, ſcribi poterit $(2:3)\surd ab$, $(3:4)\surd ab$, $(1:5)\surd ab$. Unde multiplicabitur radicalis quæcumque per quamlibet fractionem rationalem, ſcribendo fractionem, parentheſi incluſam, ante radicalem, nullo ſigno interjecto. Ut $(ab:c)\surd cd$ deſignabit id, quod oritur, multiplicando radicalem $\surd cd$ per fractionem rationalem $ab:c$.

148. Jam quantitates, quæ ſunt extra ſignum radicale; ſive ſint numericæ, ſive litterales; ſive integræ, ſive fractæ, dicentur in poſterum coefficientes ipſarum radicalium. Sed facile erit, eas quoque ſub eodem ſigno radicali reponere: ſcilicet, ſi elevatæ ad poteſtatem, ab exponente ſigni denominatam, multiplicentur per quantitates, ſub ſigno exiſtentes. Qua ratione $c\surd ab$ idem erit, ac $\surd abc^2$; & $2\surd 3$ idem, ac $\surd 12$. Pariterque $c\surd^3 a^2b$ idem erit, ac $\surd^3 a^2bc^3$; & $3\surd^3 2$, idem ac $\surd^3 54$.

149. Sed viciſſim ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, poterit quandoque aliquis ejus diviſor extra ſignum collocari: ſcilicet, ſi ex eo extrahi poſſit radix, a radicali ſigno denominata. Ita, ſi habeatur radicalis iſta $\surd abc^2$, jam in quantitate, ſub ſigno exiſtente, abc^2 reperitur diviſor c^2, unde extrahi poteſt quadrata radix: proindeque collocabitur diviſor ille extra ſignum, ſcribendo $c\surd ab$. Et ſimiliter, quia in hac radicali $\surd^3 54$ numerus 54, ſub ſigno exi-

ſtens,

ſtens, fit, multiplicando 27 per 2, & ex 27 elici poteſt radix cubica; idcirco, collocabitur diviſor 27 extra ſignum, ſcribendo $3\sqrt[3]{2}$.

CAPUT I.

Calculus radicalium ſimplicium.

150. QUantitates radicales, non ſecus ac rationales, dividuntur in ſimplices, & compoſitas. Quæ enim unicum habent terminum, eumque affectum ſigno radicali, ut $\sqrt{ac}$, $\sqrt[3]{abc}$, dicuntur radicales ſimplices. Quæ vero conſtant ex pluribus terminis, quorum, vel omnes, vel aliqui ſaltem radicali ſigno ſunt affecti, ut $\sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, vel etiam $a + \sqrt[3]{ab^2} - \sqrt[3]{a^2b}$, dicuntur radicales compoſitæ. Hinc primo quidem de calculo radicalium ſimplicium, tum de calculo radicalium compoſitarum, agendum nobis erit.

I. Reductiones radicalium ſimplicium.

151. PRo calculo radicalium ſimplicium peragendo, duplici reductione opus eſt. Prior eſt ipſarum ad minimos terminos, ſive ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductio; hæcque fit, collocando extra ſignum
*Art. 149. * omnes diviſores quantitatis, ſub ſigno exiſtentis, ex quibus elici poteſt radix, a ſigno denominata. Ita, ſi habeatur radicalis iſta $\sqrt{4abc^2}$; perſpicuum eſt, quadratam radicem extrahi poſſe, non modo ex diviſore c^2, verum etiam

etiam ex diviſore 4 : proindeque ſimplicior propoſitæ radicalis expreſſio erit $2c\sqrt{ab}$. Et ſimiliter, quia in hac alia radicali $\sqrt[3]{27a^2c^3b}$ extrahi poteſt radix cubica, tam ex diviſore c^3, quam ex diviſore 27; idcirco ſimplicior eius radicalis expreſſio erit $3c\sqrt[3]{a^2b}$.

152. Vulgo Algebriſtæ, ad reducendas quantitates radicales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, dividunt rationales, ſub ſignis exiſtentes, per maximam ſuam poteſtatem, a ſigno exponente denominatam, quæ exacte in iis continetur; & quotientem quidem ſub ſigno relinquunt, radicem vero poteſtatis extra ſignum reponunt. Ut, quia maximum quadratum, quod exacte continetur in $4abc^2$, eſt $4c^2$, cujus radix eſt $2c$: proinde, diviſo $4abc^2$ per $4c^2$, reducetur quantitas radicalis $\sqrt{4abc^2}$ ad hanc aliam $2c\sqrt{ab}$. Et ſimiliter, quia maximus cubus, qui continetur in $27a^2bc^3$, eſt $27c^3$, cujus radix eſt 3c; idcirco, diviſo $27a^2bc^3$ per $27c^3$, mutabitur radicalis $\sqrt[3]{27a^2bc^3}$ in hanc aliam $3c\sqrt[3]{a^2b}$.

153. Jam, reductis quantitatibus radicalibus, quæ ejuſdem ſpeciei ſunt, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, cognoſci poteſt, num ratio, quæ inter eas exiſtit, ſit commenſurabilis, nec ne. Si enim contigerit, illas eandem ſub ſignis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commenſurabilis, & illa eadem, quæ inter earundem coefficientes exiſtit; ſecus vero, ſi ſub ſignis radicalibus diverſas habuerint radicales. Ita radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{48}$, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, evadunt $2\sqrt{3}$, & $4\sqrt{3}$. Unde, quemadmodum $2\sqrt{3}$ eſt ad $4\sqrt{3}$, ut 2 ad 4, ſive

ut

ut 1 ad 2; ita in hac eadem ratione erit pariter $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{48}$. Et ſimiliter, quia radicales $\sqrt[3]{16a^3b^2c}$, & $\sqrt[3]{54b^2c^4}$, ubi ad ſimpliciores ſuos terminos reducuntur, fiunt $2a\sqrt[3]{2b^2c}$, & $3c\sqrt[3]{2b^2c}$, quæ ſunt inter ſe, ut $2a$ ad $3c$; erit quoq; ut $\sqrt[3]{16a^3b^2c}$ ad $\sqrt[3]{54b^2c^4}$, ita $2a$ ad $3c$.

154. Altera reductio, qua opus eſt, pro calculo radicalium ſimplicium peragendo, ea eſt, per quam radicales diverſi nominis ad eandem denominationem reducuntur. Fit autem hujuſmodi reductio; primo quidem elevando quantitatem, ſub cujuſque ſigno exiſtentem, ad poteſtatem, a ſigno alterius denominatam; tum proprium cujuſque ſigni indicem multiplicando per indicem alterius. Ita, radicales duæ $\sqrt{ab}$, & $\sqrt[3]{abc}$, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $\sqrt[6]{a^3b^3}$, & $\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$. Pariterque duæ radicales $\sqrt{5}$, & $\sqrt[3]{6}$, ſi ad eandem denominationem reducantur, evadunt $\sqrt[6]{125}$, & $\sqrt[6]{36}$.

155. Interim, ſi index ſigni unius radicalis exacte contineatur in indice ſigni alterius radicalis; ſatis erit, quantitatem prioris radicalis evehere ad poteſtatem denominatam a numero, qui, quoties unus index in altero continetur, oſtendit; & per eundem hunc numerum multiplicare indicem ejuſdem radicalis. Ut, ſi reducendæ eſſent ad eandem denominationem radicales duæ $\sqrt{ab}$, & $\sqrt[6]{a^3c^3}$, liquido patet, indicem primæ radicalis $\sqrt{ab}$ ter contineri in indice alterius $\sqrt[6]{a^3c^3}$. Quare, multiplicato indice illo per 3; & elevata ad cubum quantitate ab; erunt $\sqrt[6]{a^3b^3}$, & $\sqrt[6]{a^3c^3}$ radicales illæ, ad eandem denominationem reductæ. Atque ita quoque duæ radicales $\sqrt[3]{6}$, & $\sqrt[6]{12}$, ſi ad eandem

dem denominationem eſſent reducendæ, fient $\sqrt[6]{36}$, & $\sqrt[6]{12}$,

156. Jam additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio fieri tantum poſſunt inter radicales ejuſdem nominis. Unde, quemadmodum, ſi operationes inſtituendæ eſſent inter radicales diverſæ denominationis, reducendæ prius forent radicales illæ ad idem nomen; ita in ſequentibus, quum de iis operationibus agendum nobis erit, ſupponemus ſemper, inſtituendas eſſe illas inter eas radicales, quæ vel ejuſdem nominis datæ ſunt, vel methodo jam tradita * ad eandem denominationem ſunt reductæ.

* art. 154. 155.

II. *Additio radicalium ſimplicium.*

157. UT duæ, aut plures radicales ſimplices addantur in unum, reducendæ prius ſunt eæ * ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſi contigerit, eas ſubinde reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere; fiet additio, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, & ſcribendo ſummam, velut coefficientem ejuſdem radicalis.

* art. 151. 152.

158. Hac ratione, ſi addendæ ſint ſimul quantitates duæ radicales $\sqrt{72}$, & $\sqrt{8}$; reduco primum eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; earumque una fiet $6\sqrt{2}$, altera $2\sqrt{2}$. Unde, quia ſic reductæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habent, addo ſimul earum coefficientes 6, & 2; eritque ſumma quæſita $8\sqrt{2}$, ſive $\sqrt{128}$.

159. Similiter, ſi proponantur in unum addendæ quantitates radicales $\sqrt[3]{648}$, & $\sqrt[3]{24}$ reduco primum illas ad ſimpliciores ſuas expreſ-

ſio-

ſiones. Quumque earum una fiat $6\sqrt{3}3$; altera $2\sqrt{3}3$; erit ſumma quæſita $8\sqrt{3}3$, ſive $\sqrt{3}1536$. Atque ita quoque ſumma duarum radicalium $\sqrt{4ab}$, & $\sqrt{9ab}$ erit $5\sqrt{ab}$, ſive $\sqrt{25ab}$. Pariterque erit $7c\sqrt{ab}$, ſive $\sqrt{49abc^2}$ ſumma quantitatum radicalium $\sqrt{25abc^2}$, & $\sqrt{4abc^2}$.

160. Quod ſi autem quantitates radicales, in unum addendæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non habeant ſub ſigno radicali eandem quantitatem; tunc fiet additio, adhibito ſigno $+$. Ita quantitates radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{18}$, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiunt $2\sqrt{3}$, & $3\sqrt{2}$. Quare, ſi eæ in unum ſint addendæ, erit ſumma ipſarum, vel $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, vel etiam $\sqrt{12} + \sqrt{18}$.

161. Sed accidit interdum, ut, etſi quantitates radicales, ſimul addendæ, ad ſimpliciores ſuos terminos revocatæ, eandem habeant quantitatem ſub ſigno radicali, adhuc tamen additio fieri debeat ſigno $+$; ſcilicet, ſi coefficientes ſint litterales, iidemque diverſis litteris ſint notati. Ut, ſi ſimul addere velim quantitates duas radicales $\sqrt{abc^2}$, & $\sqrt{a^3b}$, eæ reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos eandem continent ſub ſigno radicali quantitatem; quum fiant $c\sqrt{ab}$, & $a\sqrt{ab}$. Sed, quia a cum c non aliter conjungi poteſt, quam ſigno $+$; erit ſumma earum radicalium, vel $c\sqrt{ab} + a\sqrt{ab}$, vel paulo ſimplicius $(c + a)\sqrt{ab}$.

162. Fieri quoque poteſt additio radicalium ſimplicium, abſque ulla reductione, hac alia methodo, quæ commodior erit, ubi quantitates ſunt numericæ. Capiantur quantitates, ſub ſignis exiſtentes, dividaturque major per minorem.

Et

Et ſiquidem contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; eliciatur radix iſta. Et, ſi eadem unitate aucta, fiat coefficiens radicalis minoris, habebitur ſumma quæſita.

163. Oporteat, exempli gratia, addere in unum radicales duas ſimplices $\surd 72$, & $\surd 8$. Jam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt 72, & 8. Itaque dividatur major 72 per minorem 8. Quumque habeatur pro quotiente numerus 9; liquet, ex quotiente iſto elici poſſe quadratam radicem, eamque eſſe 3. Augeatur ergo radix iſta unitate, ut fiat 4; & erit $4\surd 8$, ſive $\surd 128$ ſumma propoſitarum radicalium, prorſus ut ſupra *. *Art. 158.

164. Proponantur ſimiliter addendæ in unum duæ radicales ſimplices $\surd^3 648$, & $\surd^3 24$. Quoniam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt 648, & 24; dividatur major 648 per minorem 24. Quumque pro quotiente habeatur numerus 27, qui eſt cubus perfectus; eliciatur exinde radix cubica 3. Et quia radix iſta, unitate aucta, eſt 4; erit $4\surd^3 24$, ſive $\surd^3 1536$ ſumma datarum radicalium, omnino ut antea *. *Art. 159.

165. Quod ſi autem, diviſa quantitate majore per minorem, non habeatur quotiens talis, ut elici exinde poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; tunc facienda eſt additio, adhibito ſigno +. Ita, quia ex quotiente, qui oritur, dividendo 12 per 8, nimirum ex 12 : 8, ſive 3 : 2, elici nequit quadrata radix; idcirco ſumma duarum radicalium ſimplicium $\surd 12$, & $\surd 8$ erit $\surd 12 + \surd 8$.

166. Cæterum, ſi quantitati radicali adden-

da

da ſit quantitas aliqua rationalis, non aliter fiet additio, quam conjungendo eas ſigno $+$. Sic, ad addendum 6 cum $\sqrt{10}$, ſcribo $6+\sqrt{10}$. Pariterque, ad addendum 5 cum $\sqrt[3]{7}$, ſcribo $5+\sqrt[3]{7}$. Neque aliter fiet, ſi addi debeat, vel b cum $\sqrt{ab}$, vel b cum $\sqrt[3]{a^2b}$; quandoquidem ſumma erit, vel $b+\sqrt{ab}$, vel $b+\sqrt[3]{a^2b}$.

III. *Subtractio radicalium ſimplicium.*

167. Similiter, ut ex una radicali ſimplice ſubtrahi poſſit alia radicalis ſimplex, reducendæ ſunt eæ methodo, ſuperius
* art. 151. 152. tradita *, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſi contigerit, eas ſubinde reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere; fiet ſubtractio, ſubducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & ſcribendo reſiduum, velut coefficientem ejuſdem radicalis.

168. Hoc pacto, ſi ex radicali $\sqrt{72}$ ſubtrahenda ſit radicalis alia $\sqrt{8}$; reduco primum illas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; earundemque una fiet $6\sqrt{2}$, altera $2\sqrt{2}$. Unde, quia ſic reductæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habent; ex coefficiente unius 6 ſubtraho coefficientem alterius 2, eritque $4\sqrt{2}$, ſive $\sqrt{32}$ reſiduum quæſitum.

169. Eadem ratione, ſi ex radicali $\sqrt[3]{648}$ proponatur ſubducenda radicalis altera $\sqrt[3]{24}$; reduco primum illas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Et quia earum una fit $6\sqrt[3]{3}$, altera $2\sqrt[3]{3}$; reſiduum quæſitum erit $4\sqrt[3]{3}$, ſive $\sqrt[3]{192}$. Atque ita quoque id, quod remanet, ſubtrahendo $\sqrt{9ab}$ ex $\sqrt{25ab}$, erit $2\sqrt{ab}$, ſive $\sqrt{4ab}$. Pariterque erit

erit $c\sqrt{ab}$, ſive $\sqrt{abc^2}$ id, quod relinquitur, ſubducendo $\sqrt{4abc^2}$ ex $\sqrt{9abc^2}$.

170. Quod ſi vero radicales, ad ſubtrahendum propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos, non habeant ſub ſigno radicali eandem quantitatem; tunc fiet ſubtractio, adhibito ſigno $-$. Ita quantitates radicales $\sqrt{18}$, & $\sqrt{12}$, reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos, fiunt $3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$. Unde erit, vel $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, vel etiam $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ id, quod relinquitur, ſubtrahendo $\sqrt{12}$ ex $\sqrt{18}$.

171. Sed contingit quandoque, ut, tametſi radicales, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatæ, eandem habeant quantitatem ſub ſigno radicali; adhuc nihilominus ſubtractio fieri debeat, adhibito ſigno $-$: nimirum, ſi coefficientes ſint litterales, iidemque diverſis litteris ſint notati. Ut, ſi velim ex $\sqrt{abc^2}$ ſubtrahere $\sqrt{a^3b}$, radicales iſtæ, reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos, eandem continent ſub ſigno radicali quantitatem; quum fiant $c\sqrt{ab}$, & $a\sqrt{ab}$. Sed, quia a ex c non aliter ſubtrahi poteſt, quam per ſignum $-$; erit reſiduum propoſitæ ſubductionis, vel $c\sqrt{ab} - a\sqrt{ab}$, vel paulo ſimplicius $(c - a)\sqrt{ab}$.

172. Fieri quoque poteſt ſubtractio radicalium ſimplicium, abſque ulla reductione, hac alia methodo, quæ commodior erit, ubi quantitates ſunt numericæ. Capiantur quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, dividaturque major per minorem. Et ſiquidem contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut elici exinde poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; eliciatur radix iſta. Et, ſi eadem, unitate

diminuta, ſiat coefficiens radicalis minoris, habebitur reſiduum quæſitum.

173. Oporteat, exempli gratia, ex radicali $\sqrt{72}$ ſubducere radicalem aliam $\sqrt{8}$. Jam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt 72, & 8. Itaque dividatur major 72 per minorem 8. Quumque habeatur pro quotiente numerum 9; liquet, ex quotiente iſto elici poſſe quadratam radicem, eamque eſſe 3. Minuatur ergo radix iſta unitate, ut fiat 2; & erit $2\sqrt{8}$, ſive $\sqrt{32}$ reſiduum propoſitæ ſubtractionis, prorſus ut
*art.168. ſupra *.

174. Oporteat ſimiliter, ex radicali $\sqrt[3]{648}$ ſubducere radicalem aliam $\sqrt[3]{24}$. Quoniam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt 648, & 24; dividatur major 648 per minorem 24. Quumque pro quotiente habeatur numerus 27, qui eſt cubus perfectus; eliciatur exinde radix cubica 3. Et quia radix iſta, unitate diminuta, eſt 2; erit $2\sqrt[3]{24}$, ſive $\sqrt[3]{192}$ reſiduum ſub-
*art.169. tractionis propoſitæ, omnino ut antea *.

175. Quod ſi autem, diviſa quantitate majore per minorem, non habeatur talis quotiens, ut elici exinde poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; tunc facienda eſt ſubtractio, adhibito ſigno $-$. Ita, quia ex quotiente, qui oritur, dividendo 12 per 8, nimirum ex 12 : 8, ſive 3 : 2, elici nequit quadrata radix; erit $\sqrt{12} - \sqrt{8}$ id, quod remanet, ſubducendo $\sqrt{8}$ ex $\sqrt{12}$.

176. Cæterum, ſi ex quantitate rationali ſubducenda ſit quantitas radicalis, vel etiam ex quantitate radicali ſubducenda ſit quantitas rationalis; non aliter fiet ſubtractio, quam adhibito ſigno $-$. Sic, ad ſubtrahendum $\sqrt{10}$ ex 6, ſcri-

6, ſcribo $6 - \sqrt{10}$. Pariterque, ad ſubtrahendum 2 ex $\sqrt{3}12$, ſcribo $\sqrt{3}12 - 2$. Neque aliter fiet, ſi ſubtrahi debeat, vel $\sqrt{ab}$ ex b, vel c ex $\sqrt{ab}$; quandoquidem reſiduum erit, vel $b - \sqrt{ab}$, vel $\sqrt{ab} - c$.

IV. *Multiplicatio radicalium ſimplicium.*

177. UT radicales ſimplices per ſe mutuo multiplicentur, nulla opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione; ſed ſatis erit, quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe invicem multiplicare, & producto idem radicale ſignum præfigere. Ita, ſi radicalis $\sqrt{ab}$ multiplicanda ſit per radicalem aliam $\sqrt{ac}$; multiplico primum ab per ac; tum producto a^2bc præfigo idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{a^2bc}$, ſive etiam $a\sqrt{bc}$ productum quæſitum. Similiter productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per $\sqrt{10}$, erit $\sqrt{20}$, ſive $2\sqrt{5}$. Atque ita quoque erit $\sqrt{50}$, ſive $5\sqrt{2}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt{5}$ per $\sqrt{10}$.

178. Quod ſi radicales ſimplices, ad multiplicandum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; ii quoque per ſe mutuo multiplicandi ſunt. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $3\sqrt{5}$ per $4\sqrt{10}$, erit $12\sqrt{50}$, ſive $60\sqrt{2}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{ac}$, erit $6\sqrt{a^2bc}$, ſive $6a\sqrt{bc}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{30}$ productum, quod gignitur, multiplicando $5\sqrt{6}$ per $\sqrt{5}$, ſeu $1\sqrt{5}$; & $a\sqrt{abcd}$ productum, quod naſcitur, multiplicando $a\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$, ſeu $1\sqrt{cd}$.

179. Sed notandum hoc loco eſt, produ-

ctum, quod oritur ex mutua duarum radicalium ſimplicium multiplicatione, non ſemper eſſe radicalem aliam; ſed fieri quandoque poſſe, ut ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: nimirum, ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuo multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Ita, multiplicando 18 per 2, producitur numerus 36, qui eſt quadratum perfectum, & ejus radix eſt 6. Unde, ſi radicalis $\sqrt{18}$ multiplicanda ſit per radicalem aliam $\sqrt{2}$, productum erit quantitas rationalis 6.

180. Hinc ſi radicales, ad multiplicandum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; habebitur totale productum, multiplicando eam radicem per productum ex coefficientibus propoſitarum radicalium. Ita, ſi multiplicare oporteat $3\sqrt{8}$ per $5\sqrt{2}$; jam ex multiplicatione quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, oritur numerus 16, cujus quadrata radix eſt 4. Unde, multiplicando radicem iſtam 4, primo per coefficientem unius radicalis 3, deinde per coefficientem alterius 5; fiet 60 productum quæſitum.

181. Eadem ratione, ſi multiplicandæ eſſent per ſe mutuo radicales duæ $a\sqrt[3]{a^2b}$, & $c\sqrt[3]{ab^2}$; multiplico primum quantitates, ſub ſignis exiſtentes, a^2b, & ab^2. Et quoniam id, quod hac multiplicatione producitur, eſt cubus perfectus, nimirum a^3b^3; extraho exinde radicem cubicam ab. Denique, multiplico radicem iſtam ab, primo per coefficientem unius radicalis a, deinde per coefficientem alterius c; & erit a^2bc id, quod oritur, multiplicando $a\sqrt[3]{a^2b}$ per $c\sqrt[3]{ab^2}$.

182. Quo pacto quantitas radicalis ſimplex mul-

multiplicanda ſit per quantitatem aliam rationalem; jam ſuperius * innuimus: nimirum ſcribendo primam poſt ſecundam, nullo ſigno interjecto; vel, quod idem eſt *, faciendo, ut ſecunda ſit coefficiens primæ. Hac ratione, ad multiplicandum $\sqrt{ab}$ per c, ſcribo $c\sqrt{ab}$. Pariterque, ad multiplicandum $\sqrt[3]{a^2b}$ per a, ſcribo $a\sqrt[3]{a^2b}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{2}$ productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per 5; & $4\sqrt[3]{10}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt[3]{10}$ per 4. *art. 146. *art. 148.

183. Sed, ſi quantitas radicalis ſimplex, quam oportet per quantitatem aliam rationalem multiplicare, ſuum habeat coefficientem; tunc multiplicandus eſt coefficiens radicalis per quantitatem rationalem. Quo pacto erit $ac\sqrt{ab}$ productum, quod oritur, multiplicando $a\sqrt{ab}$ per c; & $ab\sqrt[3]{ab^2}$ productum, quod gignitur, multiplicando $a\sqrt[3]{ab^2}$ per b. Atque ita quoque erit $20\sqrt{2}$ id, quod producitur, multiplicando $4\sqrt{2}$ per 5; & $12\sqrt[3]{4}$ id, quod naſcitur, multiplicando $4\sqrt[3]{4}$ per 3.

IV. Diviſio radicalium ſimplicium.

184. Similiter, ut radicales ſimplices per ſe mutuo dividantur, haud quidem opus eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; ſed ſufficiet, quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe invicem dividere, & quotienti idem radicale ſignum præfigere. Ut, ſi oporteat, $\sqrt{abcd}$ dividere per $\sqrt{ab}$; divido primum $abcd$ per ab, tum quotienti cd præfigo idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{cd}$ quotiens quæſitus. Pariterque quotiens, qui ori-

tur, dividendo $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{2}$. Atque ita quoqoe erit $\sqrt{3a^2c}$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{3a^2b^2c^2}$, per $\sqrt{3b^2c}$; & $\sqrt{3}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{330}$ per $\sqrt{310}$.

185. Quod ſi radicales ſimplices, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; ii quoque per ſe mutuo ſunt dividendi. Qua ratione, quotiens, qui oritur, dividendo $12\sqrt{50}$ per $4\sqrt{10}$, erit $3\sqrt{5}$. Pariterque quotiens, qui producitur, dividendo $6\sqrt{a^2bc}$ per $2\sqrt{ac}$, erit $3\sqrt{ab}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{6}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $5\sqrt{30}$ per $\sqrt{5}$, ſive $1\sqrt{5}$; & $1\sqrt{cd}$, ſive $\sqrt{cd}$ quotiens, qui naſcitur, dividendo $a\sqrt{abcd}$ per $a\sqrt{ab}$.

186. Sed notandum hoc loco eſt, quotientem, qui oritur ex mutua duarum radicalium ſimplicium diviſione, non ſemper eſſe radicalem aliam; ſed fieri quandoque poſſe, ut ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: nimirum, ſi quantitates, per ſe mutuo diviſæ, producant quotientem, ex quo elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Ita, dividendo 18 per 2, habetur pro quotiente numerus 9, qui eſt quadratum perfectum, & ejus radix eſt 3. Unde, ſi radicalis $\sqrt{18}$ dividenda ſit per radicalem aliam $\sqrt{2}$, quotiens erit quantitas rationalis 3.

187. Hinc, ſi radicales, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; habebitur quotiens totius diviſionis, multiplicando radicem illam per quotientem, qui oritur ex mutua coefficientium diviſione. Ita, ſi dividere oporteat $12\sqrt{8}$ per $3\sqrt{2}$; divido primum per ſe mutuo quantitates, ſub ſignis exiſtentes, hoc eſt 8 per 2; jamque ex hac diviſione oritur nu-

me-

merus 4, cujus quadrata radix eſt 2. Unde, quia dividendo coefficientem 12 per coefficientem alium 3, fit quotiens 4: proinde, multiplicato 2 per 4, erit 8 quotiens propoſitæ diviſionis.

188. Eadem ratione, ſi dividenda eſſet radicalis $ab\sqrt{3}bc^4d$ per radicalem aliam $a\sqrt{3}bcd$; divido primum per ſe mutuo quantitates, ſub ſignis exiſtentes, hoc eſt bc^4d per bcd. Et quoniam quotiens hujus diviſionis eſt cubus perfectus, nimirum c^3; extraho exinde radicem cubicam c; eandemque multiplico per quotientam, qui oritur ex diviſione coefficientium, hoc eſt, dividendo ab per a; atque ita fiet bc quotiens propoſitæ diviſionis.

189. Quod ſi diviſio inſtitui debeat inter quantitatem radicalem ſimplicem, & quantitatem aliam rationalem; elevanda eſt primo rationalis ad eam poteſtatem, quam oſtendit radicale ſignum alterius; tum, præfixo ei eodem ſigno radicali, facienda eſt diviſio, methodo * traditæ. Ut, ſi dividere velim $\sqrt{a^2bc}$ per a, prius eveho ad quadratum rationalem a; tum quia a idem eſt, ac $\sqrt{a^2}$, fiet $\sqrt{bc}$ quotiens quæſitus. Pariterq; ſi dividere oporteat $\sqrt{3}a^2b^3c$ per b, fiat cubus ex rationali b; quumque b idem ſit, ac $\sqrt{3}b^3$, dividatur poſtea $\sqrt{3}a^2b^3c$ per $\sqrt{3}b^3$; & erit $\sqrt{3}a^2c$ quotiens, qui quæritur. *art. 184.

190. Cæterum notatu hoc loco dignum exiſtimo, quod ſi ex diviſione quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, oriatur fractio aliqua; tunc ei, parentheſi incluſæ, radicale ſignum præfigi debet. Ita, dividendo 10 per 7, oritur fractio 10 : 7. Quare, ſi radicalem $\sqrt{10}$ dividere oporteat per radicalem aliam $\sqrt{7}$, quotiens erit $\sqrt{(10:}$

7). Et ſimiliter, dividendo a^2bc per ad, producitur fractio $abc : d$. Unde, ſi radicalis $\sqrt{a^2bc}$ dividenda ſit per radicalem aliam $\sqrt{ad}$, quotiens fiet $\sqrt{(abc : d)}$.

191. Parentheſi autem includenda eſt fractio, quia radicale ſignum referri debet ad utramque fractionis partem, hoc eſt, tam ad numeratorem, quam ad denominatorem. Unde, ſi ex aliqua ejuſdem fractionis parte erui poſſit radix, a radicali ſigno denominata; tum extraha-
*art. 142. tur radix illa, & radicale ſignum, ut ſuperius * diximus, dumtaxat parti alteri adſcribatur. Ita quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{a^5b}$ per $\sqrt{abcd}$ eſt $\sqrt{(a^4 : cd)}$. Sed quia ex a^4 extrahi poteſt quadrata radix, quæ eſt a^2; idem quotiens ſimplicius exprimetur in hunc modum $a^2 : \sqrt{cd}$.

192. Si ex diviſione coefficientium ſimiliter fractio oriatur, ea quoque parentheſi, vitandæ confuſionis ergo, oportet includatur. Sic, dividendo radicalem $a^2\sqrt{bc}$ per radicalem aliam $c\sqrt{ad}$, quotiens erit $(a^2 : c)\sqrt{(bc : ad)}$, hoc eſt productum ex $a^2 : c$ per $\sqrt{(bc : ad)}$. Sed in iſto caſu expreſſiones ſimpliciores evadent, ſi coefficientes intra ſigna collocentur. Nam in propoſito exemplo, quum $a^2\sqrt{bc}$ idem ſit, ac $\sqrt{a^4bc}$, & $c\sqrt{ad}$ perinde valeat, ac $\sqrt{a^2cd}$; dividi poterit $\sqrt{a^4bc}$ per $\sqrt{ac^2d}$: quo pacto fiet quotiens $\sqrt{(a^3b : cd)}$.

VI. Radicalium ſimplicium ad poteſtates elevatio.

193. Quemadmodum nulla eſt opus reductione, quum radicales ſimpli-

plices muliplicandæ ſunt, aut dividendæ per ſe mutuo; ita neque etiam ulla requiritur reductio, ubi eædem radicales ſimplices ad datam quamcumque poteſtatem ſunt elevandæ. Nam ſatis erit, evehere ad eam poteſtatem quantitates ipſas, ſub ſignis exiſtentes, iiſque idem radicale ſignum præfigere. Qua ratione quadratum ex $\sqrt{3}abc$ erit $\sqrt{3}a^2b^2c^2$; & cubus ex $\sqrt{ab}$ erit $\sqrt{a^3b^3}$, ſive etiam $ab\sqrt{ab}$. Pariterque quadratum ex $\sqrt{3}5$ erit $\sqrt{3}25$; & cubus ex $\sqrt{3}$ erit $\sqrt{27}$, ſive etiam $3\sqrt{3}$.

194. Quod ſi radicales ſimplices, quæ ad datam quamcumque poteſtatem attolli debent, ſuos habeant coefficientes; neceſſe eſt, eos quoque ad datam illam poteſtatem evehere, qui tamen, ſubinde ad eam poteſtatem elati, adhuc extra ſignum remanebunt. Qua ratione quadratum ex $a\sqrt{3}abc$ erit $a^2\sqrt{3}a^2b^2c^2$; & cubus ex $a\sqrt{ab}$ erit $a^3\sqrt{a^3b^3}$, ſive etiam $a^4b\sqrt{ab}$. Atque ita quoque, ſi radicalis hujus $3\sqrt{3}5$ quæratur quadratum, illud erit $9\sqrt{3}25$; quod ſi vero alterius hujus radicalis $2\sqrt{3}$ quæratur cubus, is erit $8\sqrt{27}$, ſive $24\sqrt{3}$.

195. Sed hoc loco illud etiam notare oportet, poteſtatem, ad quam attollitur, ſimplex aliqua radicalis, non eſſe ſemper quantitatem aliam radicalem; ſed fieri quandoque poſſe, ut ſit commenſurabilis, ac rationalis: nimirum, ſi ex quæſita poteſtate quantitatis, ſub ſigno exiſtentis, extrahi poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Ita, quadrato-quadratum ex ab eſt a^4b^4, cujus quadrata radix eſt a^2b^2. Unde, ſi radicalis $\sqrt{ab}$ ad quadrato-quadratum, ſeu quartam poteſtatem ſit elevanda; habebitur rationalis a^2b^2.

196.

196. Patet autem, id ſemper fieri poſſe; quum radicalis propoſita elevanda eſt ad poteſtatem, cujus index, vel idem eſt cum indice ſigni radicalis, vel etiam eſt multiplex ejuſdem. Et perſpicuum eſt quoque, quod, ſicuti in priore caſu quæſita poteſtas eſt ipſa quantitas, ſub ſigno exiſtens: adeo ut, ad eam habendam, ſatis ſit, delere ex quantitate ſignum radicale; ita in ſecundo caſu habebitur quæſita poteſtas, ſi, deleto ex quantitate ſigno radicali, elevetur eadem ad poteſtatem, cujus index denotat, quotiens index poteſtatis, de qua agitur, continet indicem ſigni radicalis.

197. Hac igitur ratione quadratum ex $\surd ab$ erit ab, & cubus ex $\surd^3 abc$ erit abc. Sed, ſi radicalis $\surd ab$ elevanda ſit ad ſextam poteſtatem, ea erit a^3b^3; nam index quæſitæ poteſtatis ter continet indicem ſigni radicalis; & cubus ex ab eſt a^3b^3. Atque ita quoque ſexta poteſtas alterius radicalis $\surd^3 abc$ erit $a^2b^2c^2$; quandoquidem index ſigni radicalis bis continetur in indice quæſitæ poteſtatis; & quadratum ex abc eſt $a^2b^2c^2$. Unde etiam octava poteſtas radicalis $\surd 2$ erit 16; & nona poteſtas radicalis $\surd^3 2$ erit 8.

198. Id quum ita ſit, ſi radicalis propoſita ſuum habeat coefficientem, & quæſita poteſtas ipſius radicalis prodeat commenſurabilis, ac rationalis; multiplicanda erit ea per conſimilem poteſtatem ſui coefficientis. Ita, ſi oporteat ad quadrato-quadratum attollere radicalem $a\surd ab$, erit rationalis a^2b^2 quadrato-quadratum ex ſola radicali $\surd ab$. Quare, facto quadrato-quadrato a^4 coefficientis a, multiplicatoque a^2b^2 per a^4; erit a^6b^2 quadrato-quadratum quæſitum.

199.

199. Eadem ratione erit $a^8b^2c^2$ ſexta poteſtas ipſius $a\sqrt{^3}abc$. Nam, ſexta poteſtas ſolius radicalis $\sqrt{^3}abc$ eſt $a^2b^2c^2$. Unde, ſumpta quoque ſexta poteſtate a^6 coefficientis a, multiplicatoque $a^2b^2c^2$ per a^6; fiet $a^8b^2c^2$ ſexta poteſtas totius quantitatis $a\sqrt{^3}abc$. Atque ita quoqs ſi radicalis hujus $2\sqrt{3}$ quæratur quadrato-quadratum, illud erit 144; quod ſi vero alterius hujus radicalis $2\sqrt{^3}2$ quæratur cubo-cubus, is erit 256.

VII. Extractio radicum ex radicalibus ſimplicibus.

200. AD extrahendas radices ex radicalibus ſimplicibus, neque etiam neceſſe eſt, ad ſimpliciores ſuos terminos eas revocare; ſed ſufficiet, illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſignis exiſtentibus, iiſque eadem radicalia ſigna præfigere. Ita, ſi oporteat, quadratam radicem extrahere ex $\sqrt{^3}a^2b^2c^2$; eliciatur ea ex quantitate $a^2b^2c^2$, ſub ſigno exiſtente; tum illi, quæ eſt abc, præfigatur idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{^3}abc$ radix quadrata quæſita.

201. Sed ſi quantitas radicalis, ex qua radix extrahi debet, ſuum habeat coefficientem; neceſſe eſt, ex eo quoq; ſuam radicem extrahere, quæ tamen adhuc extra ſignum remanebit. Qua ratione quadrata radix radicalis $aa\sqrt{^3}a^2b^2c^2$ erit $a\sqrt{^3}abc$; & radix cubica alterius hujus radicalis $b^3\sqrt{a^3c^3}$ erit $b\sqrt{ac}$. Atque ita quoque, ſi radicalis hujus $9\sqrt{^3}16$ quæratur quadrata radix, ea erit $3\sqrt{^3}4$; ſed, ſi ex altera iſta radicali $8\sqrt{27}$ radicem cubicam oporteat extrahere, habebitur pro ea $2\sqrt{3}$.

202. Quod ſi contingat, ut ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi nequeat radix, de qua agitur; tunc ſatis erit, exponentem ſigni radicalis multiplicare per exponentem quæſitæ radicis. Ita, ſi extrahenda ſit radix quadrata ex $\sqrt[3]{10}$, liquet abunde, quadratam radicem non poſſe elici ex quantitate 10, ſub ſigno exiſtente. Quare, multiplicato exponente ſui ſigni radicalis 3 per exponentem quæſitæ radicis 2; fiet $\sqrt[6]{10}$ radix quadrata quæſita.

203. Eadem ratione ex numero 6 elici nequit radix cubica. Unde, ſi oportebit, ex $\sqrt{6}$ extrahere radicem cubicam; multiplico exponentem ſui ſigni radicalis 2 per exponentem quæſitæ radicis 3; & erit $\sqrt[6]{6}$ radix cubica quæſita. Atque ita quoque, ſi quæratur quarta radix radicalis $\sqrt{3}$, ea erit $\sqrt[8]{3}$; & ſi ex altera iſta radicali $\sqrt[3]{6}$ oporteat radicem quintam extrahere, habebitur pro ea $\sqrt[15]{6}$.

204. Si radicalis ſuum habeat coefficientem, & ex eo extrahi nequeat radix, de qua agitur; tunc, repoſito coefficiente ſub ſigno radicali, extrahatur quæſita radix, methodo mox * tradita. Ita, ſi quæratur quadrata radix radicalis $2\sqrt[3]{5}$, perſpicuum eſt, eam ex ejus coefficiente 2 extrahi non poſſe. Collocetur ergo coefficiens ille ſub ſigno radicali. Et, quia loco propoſitæ radicalis $2\sqrt[3]{5}$ habetur hæc alia $\sqrt[3]{40}$; fiet $\sqrt[6]{40}$ radix cubica quæſita.

* art. 202.

205. Cæterum, quæcumque radix extrahenda proponatur ex quantitate aliqua radicali; ea ſemper erit quantitas altera radicalis, nec unquam eſſe poterit commenſurabilis, ac rationalis. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam radix

illa,

illa, cvecta rurſus ad eandem poteſtatem, reſtituere nobis debet eam radicalem, unde eruta fuit. Profecto autem quælibet poteſtas quantitatis alicujus rationalis prodit ſimiliter rationalis, nec unquam radicalem aliquam poteſt nobis exhibere.

CAPUT II.

Calculus radicalium compoſitarum.

206. Quantitates radicales compoſitas, diximus * eſſe illas, quæ conſtant ex duobus, aut pluribus terminis, quorum vel omnes, vel aliqui ſaltem radicali ſigno ſunt affecti; ut $\sqrt{5} + \sqrt{6}$, vel etiam $5 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}$. Unde, ſicuti rationales compoſitæ oriuntur ex additione, vel ſubtractione rationalium ſimplicium; ita quoque radicales compoſitæ ex radicalibus ſimplicibus, ſimul additis, vel a ſe invicem ſubductis, ſuam originem trahunt. * art. 150

207. Si diviſionem, & radicum extractionem excipias, nihil habet peculiare calculus radicalium compoſitarum. De eo autem acturi, illud etiam libenter aſſumemus, ut quantitates, in quibus operationes inſtituendæ ſunt, ex ejuſdem ſpeciei radicalibus conſtent. Unde, ſi quantitates offerantur, quæ radicales contineant diverſæ ſpeciei; eæ, methodo ſuperius * tradita, mutandæ ſunt prius in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem. * art. 154. 155.

I. *Additio radicalium compoſitarum.*

208. ADditio radicalium compoſitarum ſic commode poteſt inſtitui. Primo reducantur * ſingulæ cujuſq; quantitatis addendæ partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Deinde conjungantur ſimul iiſdem omnino ſignis, quibus reperiuntur affectæ: conſiderando, ut affectam ſigno +, partem illam, quæ nullo afficitur ſigno. Ac demum, ſi plures occurrant partes, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, contrahantur in unum, habita * ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

* art. 151. 152.

* art. 145.

209. Ita, ſi quantitas $\surd 27ac + \surd 50bc$ addenda ſit quantitati $\surd 12ac - \surd 8bc$, ſumma erit $\surd 75ac + \surd 18bc$. Nam, ſi ſingulæ cujuſque quantitatis partes ad ſimpliciores ſuos terminos reducantur, prior quidem fiet $3\surd 3ac + 5\surd 2bc$, ſecunda vero evadet $2\surd 3ac - 2\surd 2bc$. Quare, connectendo iiſdem ſignis partes utriuſq; quantitatis, ſumma erit $3\surd 3ac + 5\surd 2bc + 2\surd 3ac - 2\surd 2bc$. Jam vero $3\surd 3ac + 2\surd 3ac$ idem eſt, ac $5\surd 3ac$; & $5\surd 2bc - 2\surd 2bc$ perinde valet, ac $+ 3\surd 2bc$. Itaque eadem ſumma erit ſimplicius $5\surd 3ac + 3\surd 2bc$, hoc eſt $\surd 75ac + \surd 18bc$.

210. Eadem ratione ſumma, quæ oritur ex additione quantitatum $\surd 20ab - \surd 18cd$, & $\surd 45ab - \surd 32cd$, erit $\surd 125ab - \surd 98cd$. Nam, ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur ſingulæ partes, tam primæ, quam ſecundæ quantitatis; una fiet $2\surd 5ab - 3\surd 2cd$, & altera $3\surd 5ab - 4\surd 2cd$. Quare, ſi retentis iiſdem ſignis ſimul conjungantur, ſumma erit $2\surd 5ab -$

$3\surd 2cd$

$3\sqrt{2cd} + 3\sqrt{5ab} - 4\sqrt{2cd}$. Eſt autem $2\sqrt{5ab} + 3\sqrt{5ab}$ idem, ac $5\sqrt{5ab}$; eſtque etiam $-3\sqrt{2cd} - 4\sqrt{2cd}$ idem, ac $-7\sqrt{2cd}$. Itaque eadem ſumma erit ſimplicius $5\sqrt{5ab} - 7\sqrt{2cd}$, hoc eſt $\sqrt{125ab} - \sqrt{98cd}$.

211. Quod ſi inter partes radicales aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales; eæ pariter propriis ſuis ſignis ſimul cum aliis ſunt conjungendæ; ſed, quia cum radicalibus contrahi non poſſunt, ſatis erit, quum fieri poteſt, inter ſe mutuo illas contrahere. Qua ratione, ſi quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} - 3c$ addatur alteri quantitati $3a - 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} + 8c$, ſumma erit $5a - 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} + 5c$. Et ſimiliter, ſi quantitas $7\sqrt{2ac} - 5\sqrt{3bc} - 2c$ addenda proponatur alteri quantitati $2\sqrt{3bc} - 4\sqrt{2ac} + 8c$, ſumma fiet $3\sqrt{2ac} - 3\sqrt{3bc} + 6c$.

II. Subtractio radicalium compoſitarum.

212. Similiter ſubtractio radicalium compoſitarum in hunc modum commode peragi poterit. Primo reducantur ſingulæ cujuſque quantitatis partes * ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Deinde conjungantur ſimul, mutatis ſignis partibus omnibus quantitatis ſubtrahendæ, & conſiderata, ut affecta ſigno $+$, parte illa, quæ nullo afficitur ſigno. Ac denique, ſi facta hac conjunctione, plures occurrant partes, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, contrahantur in unum, habita * ſignorum, quibus afficiuntur ratione.

*art. 151. 152.

*art. 145.

213. Hoc pacto, ſi ex quantitate $\sqrt{75ac} + \sqrt{18ab}$, ſubtrahenda ſit quantitas alia $\sqrt{12ac} -$

$\sqrt{8ab}$

$\sqrt{8ab}$, reſiduum erit $\sqrt{27ac} + \sqrt{50ab}$. Nam, ſi ſingulæ cujuſque quantitatis partes ad ſimpliciores ſuos terminos reducantur, prima quidem fiet $5\sqrt{3ac} + 3\sqrt{2ab}$, ſecunda vero evadet $2\sqrt{3ac} - 2\sqrt{2ab}$. Quare, ſi mutatis ſignis partibus ſubducendæ quantitatis, ſimul conjungantur, reſiduum erit $5\sqrt{3ac} + 3\sqrt{2ab} - 2\sqrt{3ac} + 2\sqrt{2ab}$. Jam vero $5\sqrt{3ac} - 2\sqrt{3ac}$ idem eſt, ac $3\sqrt{3ac}$; & $3\sqrt{2ab} + 2\sqrt{2ab}$ perinde valet, ac $5\sqrt{2ab}$. Itaque idem reſiduum erit ſimplius $3\sqrt{3ac} + 5\sqrt{2ab}$, hoc eſt $\sqrt{27ac} + \sqrt{50ab}$.

213. Eadem ratione reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo quantitatem $\sqrt{20ac} - \sqrt{18cd}$ ex quantitate alia $\sqrt{125ac} - \sqrt{98cd}$, erit $\sqrt{45ac} - \sqrt{32cd}$. Nam, ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur ſingulæ partes, tam primæ, quam ſecundæ quantitatis; una fiet $2\sqrt{5ac} - 3\sqrt{2cd}$, & altera $5\sqrt{5ac} - 7\sqrt{2cd}$. Quare, ſi mutatis ſignis partibus quantitatis ſubtrahendæ, ſimul conjungantur, reſiduum erit $5\sqrt{5ac} - 7\sqrt{2cd} - 2\sqrt{5ac} + 3\sqrt{2cd}$. Eſt autem $5\sqrt{5ac} - 2\sqrt{5ac}$ idem, ac $3\sqrt{5ac}$; eſtque etiam $-7\sqrt{2cd} + 3\sqrt{2cd}$ idem ac $-4\sqrt{2cd}$. Itaque idem reſiduum erit ſimplicius $3\sqrt{5ac} - 4\sqrt{2cd}$, hoc eſt $\sqrt{45ac} - \sqrt{32cd}$.

214. Quod ſi inter partes radicales quantitatis ſubtrahendæ aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales; eæ pariter, mutatis ſignis, adjungendæ ſunt partibus quantitatis, ex qua ſubtractio fieri debet; ſed quia cum radicalibus illius contrahi non poſſunt, ſatis erit, eas contrahere cum aliis rationalibus, ſi quæ ſint, in altera illa quantitate. Qua ratione, quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} - 5c$, ſubtracta ex quanti-

ta-

tate $5a - 6\sqrt{bc} + 7\sqrt{ac} + 9c$, dabit pro reſiduo $3a - 9\sqrt{bc} + 3\sqrt{ac} + 14c$. Atque ita quoque erit $7\sqrt{2ac} - 2\sqrt{3ab} - 5c$ id, quod remanet, ſubtrahendo quantitatem $5\sqrt{3ab} - 4\sqrt{2ac} + 8c$ ex quantitate altera $3\sqrt{2ac} + 3\sqrt{3ab} + 3c$.

III. Multiplicatio radicalium compoſitarum.

215. Radicales compoſitæ multiplicantur per ſe mutuo eadem plane ratione, qua fit multiplicatio rationalium compoſitarum; nimirum, multiplicando ſingulas partes unius per ſingulas partes alterius; & ſcribendo producta partialia ſigno +, aut −, prout radicales, quæ multiplicantur ad invicem, iiſdem, aut contrariis ſignis afficiuntur.

216. Hac ratione, ſi quantitas $\sqrt{10} - \sqrt{3}$ multiplicanda ſit per quantitatem aliam $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; multiplico primum $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, & erit $\sqrt{50}$ multiplicationis hujus productum; deinde multiplico $-\sqrt{3}$ per $\sqrt{5}$, & orietur exinde productum $-\sqrt{15}$; ad hæc multiplico $\sqrt{10}$ per $-\sqrt{2}$, & productum fiet $-\sqrt{20}$; deniq; multiplico $-\sqrt{3}$ per $-\sqrt{2}$, & erit $+\sqrt{6}$ id, quod ex hac multiplicatione producitur. Unde, additis in unum omnibus hiſce productis, fiet $\sqrt{50} - \sqrt{15} - \sqrt{20} + \sqrt{6}$ totius multiplicationis productum.

217. Eadem methodo inſtituenda eſt etiam multiplicatio, ubi inter partes radicales aliæ exiſtunt commenſurabiles, ac rationales. Ut, ſi velim multiplicare $a + \sqrt{ab}$ per $c - \sqrt{ac}$; multiplico primum a per c, deinde $+\sqrt{ab}$ per c, poſtea a per $-\sqrt{ac}$, ac demum $+\sqrt{ab}$ per $-\sqrt{ac}$; & fiet hac ratione productum totius multiplicatio-

nis $ac + c\sqrt{ab} - a\sqrt{ac} - a\sqrt{bc}$. Atque ita quoque erit $15 + 5\sqrt{8} - 3\sqrt{3} - \sqrt{24}$ productum, quod oritur, multiplicando $3 + \sqrt{8}$ per $5 - \sqrt{3}$.

218. In multiplicatione radicalium compoſitarum accidit ſæpe ſæpius, ut nonnulla ex productis partialibus ſimul contrahi poſſint. Itaque, ut facilius cognoſcere liceat, quæ ſint hujuſmodi producta, quæ peracta multiplicatione contrahi queunt; præſtat, ante multiplicationem, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare
* art. 151. 152. * partes omnes quantitatum, quæ per ſe mutuo debent multiplicari.

219. Ita, ſi multiplicari debeat $\sqrt{72} - \sqrt{45}$ per $\sqrt{60} - \sqrt{24}$, productum erit $\sqrt{4320} - \sqrt{2700} - \sqrt{1728} + \sqrt{1080}$, in quo non ita facile apparet, num partes ejus ſimul contrahi poſſint. Sed, facta reductione, quia earum quantitatum una fit $6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$, & altera $2\sqrt{15} - 2\sqrt{6}$; erit idem productum $12\sqrt{30} - 6\sqrt{75} - 12\sqrt{12} + 6\sqrt{30}$: in quo, non modo ultro liquet, $12\sqrt{30} + 6\sqrt{30}$ idem eſſe, ac $18\sqrt{30}$; ſed facile etiam percipitur, contrahi ſimul pariter poſſe $-6\sqrt{75} - 12\sqrt{12}$, quum ſi ulterius reducantur, fiant $-30\sqrt{3} - 24\sqrt{3}$, quæ perinde valent, ac $-54\sqrt{3}$.

220. Præſtat etiam, ante multiplicationem, partes cujuſque radicalis ad ſimpliciores ſuos terminos reducere, ut facilius cognoſci poſſit, quæ producta oriantur rationalia, quæve non item. Ita, multiplicando $\sqrt{180}$ per $\sqrt{125}$, non aliter cognoſci poteſt, num productum, inde ortum, $\sqrt{22500}$ ſit rationale, nec ne, quam extrahendo radicem quadratam ex 22500; ſed, inſtituta reductione ante multiplicationem, quia

ea-

earum radicalium una ſit $6\sqrt{5}$, altera $5\sqrt{5}$; clare liquet productum, quod oritur ex earum multiplicatione, eſſe 150, atque adeo rationale.

IV. Radicalium compoſitarum ad poteſtates elevatio.

221. Similiter radicales compoſitæ elevantur ad quamcumque datam poteſtatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur compoſitæ rationales: nimirum, conſtituendo ex partibus propoſitæ quantitatis terminos omnes, qui adeſſe debent in poteſtate quantitatis bimembris; & conſiderando quoque, velut unam, partes omnes priores, ubi oblata quantitas ex pluribus, quam duabus partibus, conſtat.

222. Hac ratione, ſi radicalis compoſita, ad quadratum elevanda, ſit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, quæ duabus ex partibus conſtat; primo fiat quadratum ex $\sqrt{ab}$, quod erit ab; deinde ſumatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, nimirum $2\sqrt{a^2bc}$, ſive etiam $2a\sqrt{bc}$; denique fiat quadratum ac ex parte altêra $\sqrt{ac}$. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, fiet $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$ quadratum propoſitæ quantitatis.

223. Sed, ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, quæ tribus ex partibus conſtat; primo fiat quadratum ex duabus primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, velut una conſideratis, quod erit $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$; tum capiatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando eaſdem primas partes $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ per partem ter-

tem tertiam $\sqrt{ad}$, nimirum $2a\sqrt{bd} + 2a\sqrt{cd}$; denique fiat quadratum ad ex parte tertia $\sqrt{ad}$. Et, additis ſimul his omnibus quantitatibus, erit $ab + 2a\sqrt{bc} + ac + 2a\sqrt{bd} + 2a\sqrt{cd} + ad$ propoſitæ quantitatis quadratum.

224. Eadem ratione, ſi radicalis compoſita, ad cubum elevanda, ſit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, quæ conſtat ex duabus tantummodo partibus; primo fiat cubus ex $\sqrt{ab}$, qui erit $\sqrt{a^3b^3}$, ſive $ab\sqrt{ab}$; tum ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando ab, quadratum primæ partis $\sqrt{ab}$, per partem alteram $\sqrt{ac}$, nimirum $3ab\sqrt{ac}$; porro capiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando ac, quadratum ſecundæ partis $\sqrt{ac}$, per partem primam $\sqrt{ab}$, ſcilicet $3ac\sqrt{ab}$; denique fiat cubus $ac\sqrt{ac}$ ex parte altera $\sqrt{ac}$. Et, additis in unum omnibus hiſce quantitatibus, erit $ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$ cubus propoſitæ quantitatis.

225. Sed, ſi ad cubum ſit elevanda quantitas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, quæ tres pártes complectitur; primo fiat cubus ex duabus primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, velut una conſideratis, qui erit $ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$; deinde capiatur triplum ejus, quod naſcitur, multiplicando $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$, quadratum ex iiſdem primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, per partem tertiam $\sqrt{ad}$, nimirum $3ab\sqrt{ad} + 6a\sqrt{abcd} + 3ac\sqrt{ad}$; poſtea ſumatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando ad, quadratum partis tertiæ $\sqrt{ad}$, per priores duas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$; ſcilicet $3ad\sqrt{ab} + 3ad\sqrt{ac}$; denique fiat cubus $ad\sqrt{ad}$ ex parte tertia $\sqrt{ad}$. Et, ſi omnes iſtæ, quantitates ſimul addantur, prodibit cubus propoſitæ quantitatis

$ab\sqrt{ab}$

$ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac} + 3ab\sqrt{ad} + 6a\sqrt{abcd} + 3ac\sqrt{ad} + 3ad\sqrt{ab} + 3ad\sqrt{ac} + ad\sqrt{ad}$.

226. Eadem autem eſt operandi ratio, ſi ſigna radicalia fuerint cubica, aut alterius cujuſcumque ſpeciei. Ita quadratum ex $\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$ erit $a\sqrt[3]{ab^2} + 2a\sqrt[3]{abc} + a\sqrt[3]{ac^2}$; & cubus ejuſdem quantitatis erit $a^2b + 3a^2\sqrt[3]{b^2c} + 3a^2\sqrt[3]{bc^2} + a^2c$. Nec diſſimiliter operabitur, ſi inter partes radicales aliqua extiterit commenſurabilis, ac rationalis. Qua ratione quadratum ex $a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $a^2 + 2a\sqrt{ab} + ab + 2a\sqrt{ac} + 2a\sqrt{bc} + ac$; & cubus ex eadem quantitate erit $a^3 + 3a^2\sqrt{ab} + 3a^2b + ab\sqrt{ab} + 3a^2\sqrt{ac} + 6a^2\sqrt{bc} + 3ab\sqrt{ac} + 3a^2c + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$.

V. Præparatio ad diviſionem radicalium compoſitarum.

227. UT diviſio radicalium compoſitarum commode peragi poſſit, tradenda prius eſt methodus, qua inveniri queat quantitas contraria cujuſcumque datæ radicalis. Vocant autem Algebriſtæ datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ ejuſmodi eſt, ut ſi per eam multiplicetur data quantitas radicalis, id, quod producitur, ſit quantitas alia commenſurabilis, ac rationalis.

228. Ita quantitatis radicalis $\sqrt[3]{a^2b}$ erit $\sqrt[3]{ab^2}$ quantitas contraria; nam, ſi duæ iſtæ quantitates multiplicentur per ſe mutuo, prodibit quantitas rationalis ab. Et ſimiliter quantitatis radicalis $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$

quantitas contraria; quandoquidem id, quod producitur ex mutua iſtarum quantitatum multiplicatione, eſt $ab - ac$, quam liquet eſſe quantitatem commenſurabilem, ac rationalem.

229. Jam, ſi quantitas radicalis eſt ſimplex, facile erit, ejus contrariam quantitatem invenire. Elevetur enim ipſa radicalis data ad poteſtatem, uno gradu minorem ea, quam index ſigni radicalis oſtendit. Et ſi, reducta poteſtate illa * ad ſimpliciorem ſuam expreſſionem, deleatur ex ea coefficiens, velut jam rationalis; id, quod ſupererit, erit quantitas contraria quæſita.

* *art.* 151. 152.

230. Hac ratione, ſi data quantitas radicalis ſit $\sqrt[3]{a^2b}$; ob indicem ſigni radicalis 3, elevanda eſt ipſa quantitas ad quadratum, quod erit $\sqrt[3]{a^4b^2}$, ſive etiam $a\sqrt[3]{ab^2}$: proindeque, deleto coefficiente a, fiet $\sqrt[3]{ab^2}$ ejus quantitas contraria. Similiter, ſi radicalis data ſit $\sqrt[5]{a^4b}$; ob indicem ſigni radicalis 5, attollenda eſt ea ad quadrato-quadratum, quod erit $\sqrt[5]{a^{16}b^4}$, ſive etiam $a^3\sqrt[5]{ab^4}$: quare, deleto coefficiente a^3, habebitur $\sqrt[5]{ab^4}$ pro eius quantitate contraria.

231. Quod ſi autem data radicalis ſit compoſita, ejuſque duæ ſint partes, invenietur ipſius quantitas contraria hac methodo. Mutetur ſignum uni ejus parti, ita ut ex + fiat —, vel etiam ex — evadat +. Tum, facta mutatione iſta, elevetur quantitas tota ad poteſtatem, uno gradu minorem ea, quam index ſigni radicalis oſtendit. Deleantur denique ex terminis hujus poteſtatis coefficientes, hoc eſt numeri deſignantes, quoties in poteſtate ſumi debent termini illi; & erit id, quod relinquitur, quantitas contraria quæſita.

232.

232. Hac ratione, ſi quantitas radicalis data ſit $\surd ab + \surd ac$, erit ejus contraria quantitas $\surd ab - \surd ac$. Nam, quum index ſigni radicalis ſit 2, elevanda eſt quantitas $\surd ab - \surd ac$ ad poteſtatem, cujus index ſit 1: proindeque quantitas contraria quæſita erit ipſamet quantitas $\surd ab - \surd ac$. Sed, ſi data quantitas radicalis ſit $\surd^3 abc + \surd^3 abd$, erit ejus contraria quantitas $\surd^3 a^2b^2c^2 - \surd^3 a^2b^2cd + \surd^3 a^2b^2d^2$. Eſt enim index ſigni radicalis 3; adeoque elevanda eſt quantitas $\surd^3 abc - \surd^3 abd$ ad poteſtatem, cujus index ſit 2, nimirum ad quadratum: & propterea, deletis coefficientibus ex terminis ejus quadrati, fiet $\surd^3 a^2b^2c^2 - \surd^3 a^2b^2cd + \surd^3 a^2b^2d^2$ quantitas contraria quæſita.

233. Nec obſcura eſt hujus regulæ ratio, ſi conſideremus, quod ſicuti, multiplicato $a + b$ per $a - b$, producitur $a^2 - b^2$; ſic, multiplicato $a + b$ per $a^2 - ab + b^2$, productum orietur $a^3 + b^3$; &, multiplicato $a + b$ per $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, productum fiet $a^4 - b^4$; atq; ita deinceps. Hinc enim clare liquet, quod ſi $a + b$ referat radicalem, cujus duæ ſunt partes, ejus contraria quantitas eſſe debet $a - b$, quum index ſigni radicalis eſt 2; $a^2 - ab + b^2$, quum ille index eſt 3; $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, quum idem index eſt 4; atque ita de aliis. Nam, inſtituta unius quantitatis per aliam multiplicatione, habebuntur in producto ipſarum a, & b eæ tantummodo poteſtates, quas index ſigni radicalis oſtendit.

234. Eadem autem eſt operandi ratio, ſi una ex duabus partibus propoſitæ radicalis ſit commenſurabilis, ac rationalis. Semper enim

producta alia, contrarietate ſignorum, ſeſe mutuo deſtruent, & dumtaxat remanebunt ipſarum partium poteſtates illæ, quas index ſigni partis radicalis oſtendit. Qua ratione, ſi quantitas radicalis data ſit $a + \sqrt{bc}$, & quæratur ejus quantitas contraria, erit illa $a - \sqrt{bc}$. Et ſimiliter, ſi data quantitas radicalis ſit $a + \sqrt[3]{abc}$, erit ejus contraria quantitas $a^2 - a\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

235. Quod, ſi quantitas radicalis plures habeat partes, quam duas, paulo difficilior erit contrariæ quantitatis inventio. Sed, quemadmodum in reſolutione problematum non ita frequens eſt uſus talium quantitatum contrariarum; ita, ſi iis quandoque opus ſit, poterunt facillime per analyſim ipſam inveniri. Dabimus interim hic duas regulas ſpeciales, analyſis ope detectas, pro radicalibus trium partium; unam, quum index ſigni radicalis eſt 2; alteram, quum idem index eſt 3.

236. Itaque pro iis radicalibus, quæ tres habent partes, & in quibus ſigna radicalia ſunt quadrata, inveniri poterunt hac arte quantitates contrariæ. Sit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$ quantitas propoſita. Mutetur ſignum uni ejus parti, puta $\sqrt{ad}$, ita ut fiat $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$; tum multiplicetur $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$ per $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$. Et quoniam ex hac multiplicatione producitur quantitas $ab + ac - ad + 2a\sqrt{bc}$, in qua una pars eſt radicalis; conſiderari hæc poterit, velut radicalis, duabus partibus conſtans; adeoque, ſi rurſus multiplicetur per ſuam contrariam $ab + ac - ad - 2a\sqrt{bc}$, orietur tandem quantitas omnino rationalis $a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 - 2a^2bd - 2a^2cd + a^2d^2$. Unde, quia quantitas

titas propoſita evadit rationalis, multiplicando eam primo per $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}-\sqrt{ad}$, & deinde per $ab+ac-ad-2a\sqrt{ab}$, erit ejus quantitas contraria productum ex $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}-\sqrt{ad}$ in $ab+ac-ad-2a\sqrt{bc}$.

237. Pro iis autem radicalibus, quæ habent quidem tres partes, ſed index ſigni radicalis eſt 3, adhiberi poterit hæc regula. Sit $\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{a^2c}-\sqrt[3]{a^2d}$ quantitas propoſita. Sumantur, tum quadrata partium omnium, cum producta ex ſingulis binis; illa quidem propriis ſuis ſignis, hæc ſignis omnino mutatis. Et, additis omnibus in unum, per ſummam $a\sqrt[3]{ab^2}+a\sqrt[3]{ac^2}+a\sqrt[3]{ad^2}-a\sqrt[3]{abc}+a\sqrt[3]{abd}+a\sqrt[3]{acd}$ multiplicetur quantitas propoſita. Et quoniam ex hac multiplicatione producitur quantitas $a^2b+a^2c-a^2d+3a^2\sqrt[3]{bcd}$, in qua una tantum pars eſt radicalis; conſiderari hæc poterit, velut radicalis, duabus partibus conſtans. Quocirca, ſi per ejus contrariam quantitatem multiplicetur ſumma illa, habebitur quantitas contraria quæſita.

VI. Diviſio radicalium compoſitarum.

238. Radicales compoſitæ interdum dividi poſſunt per ſe mutuo eadem omnino ratione, qua fit diviſio rationalium compoſitarum. Proponatur, exempli cauſa, dividenda quantitas radicalis $\sqrt{a^2bd}-\sqrt{a^2cd}-\sqrt{a^2bf}+\sqrt{a^2cf}$ per radicalem aliam $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$. Divido primum $\sqrt{a^2bd}$ per $\sqrt{ab}$. Jamque, multiplicato diviſore $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$ per quotientem $\sqrt{ad}$, producitur quantitas $\sqrt{a^2bd}-\sqrt{a^2cd}$, quæ ſub-

ſubtracta ex quantitate dividenda relinquit $-\sqrt{a^2bf}+\sqrt{a^2cf}$. Hinc divido deinde $-\sqrt{a^2bf}$ per $\sqrt{ab}$. Et quoniam quantitas, quæ producitur, multiplicando diviſorem $\sqrt{ab}-\sqrt{ac}$ per alium iſtum quotientem $-\sqrt{af}$, eſt $-\sqrt{a^2bf}+\sqrt{a^2cf}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil; concludo, quotientem totius diviſionis eſſe $\sqrt{ab}-\sqrt{af}$.

239. Similiter, ſi dividenda proponatur quantitas radicalis $\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{15}+\sqrt{10}$ per radicalem aliam $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; divido primum $\sqrt{18}$ per $\sqrt{3}$, & multiplicato diviſore $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ per quotientem $\sqrt{6}$, producitur quantitas $\sqrt{18}-\sqrt{12}$, quæ ſubtracta ex quantitate propoſita relinquit $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$. Quare divido ulterius $-\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$. Quumque, multiplicato diviſore $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ per alium iſtum quotientem $-\sqrt{5}$, oriatur quantitas $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit nihil: proinde quotiens propoſitæ diviſionis erit $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

240. Generaliter autem perficitur diviſio radicalium compoſitarum, faciendo, ut diviſor unicum terminum contineat. Id vero obtinebitur, ſi methodo, paulo ante tradita, capiatur quantitas contraria diviſoris, & per eam multiplicetur, tam diviſor, quam quantitas dividenda. Hac enim ratione diviſor evadet rationalis; adeoque unicum tantum terminum continebit. Neceſſe eſt autem, per quantitatem contrariam diviſoris multiplicare, tum diviſorem ipſum, cum quantitatem dividendam, ut diviſio propoſita maneat eadem, & quæſitus exinde quotiens erui poſſit.

241. Proponatur itaque dividenda quantitas

tas $\sqrt{24} + \sqrt{8}$ per quantitatem aliam $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. Capiatur quantitas contraria diviſoris, quæ per regulam, ſuperius * traditam, erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. *art. 231. Multiplicetur per eam, tum quantitas dividenda $\sqrt{24} + \sqrt{8}$, cum diviſor ipſe $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; earumque una fiet $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$, altera 2, ſive $\sqrt{4}$. Denique dividatur $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$ per $\sqrt{4}$: id, quod fit, dividendo ſingulos terminos illius per $\sqrt{4}$; & erit $\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{18} - \sqrt{6}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

242. Proponatur ſimiliter dividenda quantitas radicalis $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$ per $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Sumatur quantitas contraria diviſoris, eaque juxta regulam, ſuperius * traditam, *art. 231. erit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Multiplicetur per quantitatem iſtam, tam diviſor $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, quam quantitas dividenda $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$. Jamque iſtarum quantitatum prior fiet 1, ſive $\sqrt{1}$, altera evadet $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$. Denique dividatur $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ per $\sqrt{1}$; & quotiens hujus diviſionis, qui eſt ipſa quantitas dividenda, dabit eum, quem quærimus.

243. Verum quidem eſt, quod paulo ſuperius * ex eadem diviſione, alia operandi ratio- *art. 239. ne, ortus eſt quotiens $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Sed notetur hic velim, quod ſi termini quantitatis radicalis $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocentur, tum deinde contrahantur, prodibit ipſa quantitas $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Per reductionem enim ad terminos ſimpliciores quantitas illa fit $3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$. Jam vero $3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$ idem ſunt, ac $\sqrt{6}$; & $-3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ perinde valent, ac $-\sqrt{5}$. Quare ea-

dem quantitas contracta fiet demum $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

244. Proponatur tandem dividenda quantitas radicalis $\sqrt{a^2bd} - \sqrt{a^2cd} - \sqrt{a^2bf} + \sqrt{a^2cf}$ per $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$. Diviſoris quantitas contraria
*Art. 231. per regulam, ſuperius * traditam, eſt $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$. Quare, ſi per eam multiplicetur, tum quantitas dividenda, cum ipſe diviſor; illa quidem fiet $\sqrt{a^3b^2d} - \sqrt{a^3b^2f} - \sqrt{a^3c^2d} + \sqrt{a^3c^2f}$, iſte vero evadet $ab - ac$. Dividenda eſt ergo $\sqrt{a^3b^2d} - \sqrt{a^3b^2f} - \sqrt{a^3c^2d} + \sqrt{a^3c^2f}$ per $ab - ac$. Sed, ad diviſionem commode peragendam, reducantur termini illius ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, ut loco ejus habeatur hæc alia $ab\sqrt{ad} - ab\sqrt{af} - ac\sqrt{ad} + ac\sqrt{af}$, ſive etiam $(ab - ac)\sqrt{ad} - (ab + ac)\sqrt{af}$. Et reductione iſta clare liquet, quotientem eſſe debere $\sqrt{ad} - \sqrt{af}$,
*Art. 238. omnino ut antea *.

CAPUT III.

Extractio radicum ex binomiis.

245. IN præcedenti capite, in quo de calculo radicalium compoſitarum agendum nobis propoſuimus, dumtaxat additionem, ſubtractionem, multiplicationem, formationem poteſtatum, & diviſionem iſtarum quantitatum explicuimus: nimirum, quia extractio radicum ex iiſdem radicalibus res nobis digna viſa eſt, de qua peculiare capite diſſereretur. Eam igitur ſeorſim explicandam aggredimur hoc alio capite. Sed quoniam in reſolutione problematum, quorſum hæc omnia tendunt, non

alius

alius fere caſus occurrit, quam, ut radices extrahantur ex iis radicalibus compoſitis, quæ vulgo dicuntur binomia; idcirco de extractione radicum ex binomiis dumtaxat hic ſermonem inſtituemus.

I. *Natura binomiorum, unde radices ſunt extrahendæ.*

246. QUemadmodum radicales ſimplices dicuntur paſſim monomia, veluti quantitates unius nominis, ſeu termini; ita radicales compoſitæ appellari ſolent multinomia, ut quæ plura nomina, ſeu terminos complectuntur. Ob multitudinem autem terminorum, diſtinguuntur eædem radicales compoſitæ in binomia, trinomia, quadrinomia, &c. Quæ enim duos habent terminos, dicuntur binomia; quæ tres, trinomia; quæ quatuor, quadrinomia; atque ita deinceps.

247. Diverſitas autem terminorum repeti debet a diverſitate quantitatum, quæ in iis terminis, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatis, ſub radicali ſigno continentur. Nam, in radicalibus compoſitis, ſi duæ, aut plures radicales ſimplices occurrant, quæ reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos, eandem habeant ſub radicali ſigno quantitatem; eæ non totidem terminos, ſed unum conſtituere dicuntur. Qua ratione radicalis compoſita $3\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ cenſeri debet binomium, & non trinomium, quia ſcilicet partes duæ $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ reducuntur * ad unam $5\sqrt{3}$. *art. 45.

248. Atque id, non modo in iis radicalibus lo-

locum habet, in quibus fieri poteſt hujuſmodi contractio, hoc eſt, in quibus coefficientes, vel ſunt numerici, vel iiſdem litteris deſignati; verum etiam in iis, quarum coefficientes diverſis litteris exprimuntur. Sic radicalis compoſita $a\sqrt{ab} + c\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$ cenſenda eſt etiam binomium, & non trinomium. Nam, etſi partes duæ $a\sqrt{ab} + c\sqrt{ab}$, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, inter ſe mutuo contrahi nequeant; adhuc tamen pro unico termino ſumi debent, & ſimplicius exprimi poſſunt, vel
*Art.161. in hunc modum $(a + c)\sqrt{ab}$, ut ſuperius * jam innuimus, vel etiam in hunc alium $d\sqrt{ab}$, ſubſtituendo ſolam litteram d loco ipſarum $a + c$.

249. Neque vero, ut radicales compoſitæ dicantur binomia, trinomia, aut quadrinomia, neceſſe eſt, ut omnes ipſarum termini radicalibus ſignis afficiantur. Iiſdem quippe nominibus deſignandæ ſunt etiam, ſi in iis aliquis terminus fuerit commenſurabilis, ac rationalis. Interim, ſicuti omnes illæ partes radicales, quæ eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem, pro uno eodemque termino computantur; ſic etiam, quotcumque extiterint partes rationales, velut unus, idemque terminus omnes haberi debent. Qua ratione binomium erit, & non trinomium, tam $2 + 5 + \sqrt{10}$, quam $a - c + \sqrt{ab}$; nam prior quantitas reducta evadet $7 + \sqrt{10}$, poſterior vero contrahi poterit in hunc modum $(a - c) + \sqrt{ab}$.

250. Jam in hoc capite dumtaxat de extractione radicum ex binomiis agendum nobis eſt. Sed binomia, ex quibus radices ſunt extrahendæ, non ex cujuſcumque generis radicalibus

con-

conſtabunt, ſed ex iis tantummodo, quæ ſigno quadratæ radicis afficiuntur. Et ratio eſt; tum quia hujuſmodi binomia potiſſimum in reſolutione problematum nobis occurrunt; cum etiam, quia ex aliis binomiis non eſt adeo facile radices quaſvis extrahere. Sed radices horum binomiorum tales etiam optamus, ut nonniſi ejuſdem generis radicales comprehendant. Nam, etſi radix, exempli gratia, quadrata binomii $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ exhiberi poſſit per $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$; arbitramur tamen, perinde rem eſſe, ac ſi exprimeretur, adhibito ſigno alio radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

251. Ex eo autem, quod radices extrahendæ debent eſſe ejuſdem naturæ cum binomiis, ex quibus eas oportet extrahere; liquet, radicem quadratam extrahi poſſe ex iis dumtaxat binomiis, quorum alter terminus eſt radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis. Sive enim pro latere, ſeu radice capiatur binomium, cujus uterque terminus ſit radicalis; ſive binomium, cujus unus terminus ſit radicalis, & alter rationalis: utique quadratum ſemper erit binomium, compoſitum ex uno termino radicali, & altero rationali. Quare omnino neceſſe eſt, ut ex ſolis hiſce binomiis extrahi poſſit radix quadrata, qualem optamus.

252. Quod ut clarius intelligatur, referat primo $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ radicem, ſeu latus. Itaque, ſi fiat quadratum ex $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$; erit $(ab + ac) + 2a\sqrt{bc}$ binomium, ad quod quadrata illa radix refertur; verumtamen binomium iſtud unum habet terminum radicalem, & alterum commenſurabiem, ac rationalem. Referat ſecundo $a +$

$\sqrt{ac}$

$\sqrt{ac}$ eandem radicem. Et, conſtituto itidem quadrato ex $a + \sqrt{ac}$, erit $(aa + ac) + 2a\sqrt{ac}$ binomium, cui quadrata illa radix correſpondet; ſed hoc alterum binomium ſimiliter ex uno termino radicali, & ex altero rationali componitur.

253. Non perinde vero res eſt, quum agitur de extractione radicis cubicæ. Hæc enim, etſi ejuſdem naturæ debeat eſſe cum binomio, unde eam oportet extrahere; tamen elici poterit, tam ex binomio, cujus unus terminus eſt radicalis, & alter rationalis, quam ex binomio, quod habet utrumque terminum radicalem. Nam, ſi ſumatur pro radice, ſeu latere binomium, unum habens terminum radicalem, & alterum rationalem; talis etiam cubus orietur. Quod ſi vero ut radix, ſeu latus capiatur binomium, cujus uterque terminus ſit radicalis; etiam cubus ejus utrumque terminum radicalem habebit. Quare omnino neceſſe eſt, ut ex utriuſque generis binomiis extrahi poſſit radix cubica, qualem optamus.

254. Et ut clarius id etiam intelligatur, referat primo $a + \sqrt{ac}$ radicem, ſeu latus. Itaque, ſi fiat cubus ex $a + \sqrt{ac}$; erit $(a^3 + 3a^2c) + (3a^2 + ac)\sqrt{ac}$ binomium, ad quod cubica illa radix refertur; patetque binomium iſtud, ad inſtar ſuæ radicis, unum habere terminum rationalem, & alterum radicalem. Referat ſecundo $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ eandem radicem. Et, conſtituto itidem cubo ex $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $(ab + 3ac)\sqrt{ab} + (3ab + ac)\sqrt{ac}$ binomium, cui cubica illa radix correſpondet: unde, non ſecus, ac ſua radix, utrumque terminum radicalem habebit.

255. De aliis porro radicibus, ad inſtar quadratæ, & cubicæ, judicium ferri debet. Ubi

enim

enim radix refertur ad poteſtatem ordinis paris; ea extrahi poterit ex iis tantummodo binomiis, quorum unus terminus eſt radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis. Ubi vero refertur ad poteſtatem ordinis imparis; licebit, eam elicere etiam ex binomio, quod habet utrumque terminum radicalem. Sed id intelligendum eſt, quum radix eſſe debet talis, qualem optamus, hoc eſt ejuſdem naturæ cum binomio, unde eam oportet extrahere.

II. *Extractio radicis quadratæ ex binomiis.*

256. Vidimus ſupra *, radicem quadratam, qualem optamus, elici poſſe tantum ex binomiis, quorum unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, ac radicalis. Neque vero ex omnibus hujuſmodi binomiis eam eruere licet; ſed duabus aliis conditionibus opus eſt, ut ea extrahi queat. Eas autem ut analytice inveniamus, referat indefinite $\surd m + \surd n$ radicem quadratam alicujus binomii. Itaque, ſi fiat quadratum ex $\surd m + \surd n$, erit $(m + n) + 2\surd mn$ ipſum binomium. *art. 251.

257. Jam in hoc binomio, ſicuti $(m + n)$ eſt terminus rationalis, & $2\surd mn$ terminus radicalis; ita liquido patet, $\surd mn$ eſſe mediam proportionalem inter m, & n. Quare terminus rationalis $m + n$ major erit termino radicali $2\surd mn$; quum in omni proportione maximus, & minimus ſimul reliquis duobus terminis majores eſſe debeant: & propterea, ut ex aliquo binomio quadrata radix, qualem optamus, extrahi poſſit, non modo debet eſſe unus ejus terminus ratio-

nalis, & alter radicalis; verum etiam terminus rationalis major ſit oportet termino radicali.

258. Præterea, ſi ex $m^2 + 2mn + n^2$, quadrato termini rationalis $m + n$, ſubducatur $4mn$, quadratum termini radicalis $2\sqrt{mn}$; reſiduum; $m^2 - 2mn + n^2$ reperitur eſſe pariter quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio extrahi poſſit quadrata radix, qualem optamus, haud quidem ſatis eſt, ut unus ejus terminus ſit radicalis, & alter rationalis, itemque, ut terminus rationalis ſit major termino radicali; ſed requiritur quoque, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis illius binomii, ſit etiam quadratum.

259. His ergo conditionibus refertum eſſe debet binomium, ut exinde elici poſſit radix quadrata, quæ tantum radicales quadratas comprehendat. Ubi autem adſunt in binomio conditiones iſtæ, extrahetur radix hac arte. Capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii; ejuſque quadrata radix ſeorſim addatur, & detrahatur termino ~~radicali~~ rationali, Sumatur porro ſemiſſis, tum ſummæ, cum reſidui. Et erunt radices horum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

260. Proponatur, exempli gratia, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \sqrt{60}$. Jam in hoc binomio adſunt tres iſtæ conditiones. Eſt enim 8 rationalis, & major $\sqrt{60}$; eſtque etiam quadratum 4 differentia quadratorum, quæ fiunt ex 8, & $\sqrt{60}$. Capiatur ergo differentia iſta 4. Et ejus quadrata radix 2, ſicuti addita 8, dat 10; ſic detracta ex 8, relinquit 6. Unde, quia ſemiſſis ſummæ eſt 5, & ſemiſſis reſidui eſt 3; erit

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}+\sqrt{3}$, hoc eſt ſumma ex radicibus horum ſemiſſium, radix quadrata propoſiti binomii.

261. Oporteat ſimiliter, extrahere quadratam radicem ex binomio $11+\sqrt{72}$, quod etiam tribus illis conditionibus gaudet. Quoniam quadratum ex 11 eſt 121, & quadratum ex $\sqrt{72}$ eſt 72; erit 49 differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis illius. Jam ejus quadrata radix 7, ſicuti addita termino rationali 11, exhibet ſummam 18; ſic detracta ex eodem termino, dat pro reſiduo 4. Quare, quum ſemiſſes illius ſummæ, & iſtius reſidui ſint 9, & 2, quorum quadratæ radices ſunt 3, & $\sqrt{2}$; erit $3+\sqrt{2}$ quæſita radix.

262. Sed notandum hoc loco eſt, quod radices illarum ſemiſſium connectendæ ſunt ſimul eodem omnino ſigno, quo partes binomii propoſiti ſunt conjunctæ. Qua ratione quadrata radix binomii $8-\sqrt{60}$ erit $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et ſimiliter quadrata radix binomii $11-\sqrt{72}$ erit $3-\sqrt{2}$. Perinde autem res eſt, ſive ſcribatur $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, ſive $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8-\sqrt{60}$; quum eadem ſemper quantitas producatur, ſive multiplicetur per ſe ipſam $a-b$, ſive $b-a$. Sed non perinde eſt, ſive binomium propoſitum ſit $8-\sqrt{60}$, ſive viciſſim $\sqrt{60}-8$; nam, ut ſuo loco deinceps oſtendemus, quum binomium eſt $\sqrt{60}-8$, quadrata radix contradictionem involvit.

263. Cæterum allatæ regulæ ratio non eſt ita obſcura, ut hic intelligi non poſſit. Si enim referat indefinite $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ radicem quadratam alicujus binomii, erit $(m+n)+2\sqrt{mn}$ binomium iſtud. Et quemadmodum clare liquet,

differentiam quadratorum ex terminis ejus, hoc eſt $m^2 - 2mn + n^2$, eſſe etiam quadratum; ita quoque liquido patet, quod ſi radix hujus differentiæ $m - n$ primo addatur termino rationali $m + n$, deinde ex eodem ſubducatur, ſumma quidem ſit $2m$, reſiduum vero $2n$. Sed, & ſumptis ſemiſſibus ejus ſummæ, & hujus reſidui, patet quoque, radices iſtorum ſemiſſium eſſe terminos aſſumptæ radicis.

264. Nec ſilentio hic præteribimus, quod ſi in radicibus extrahendis parum curemus, num eæ contineant radicales quadratas, aut alterius cujuſque ſpeciei, poſſit eadem regula elici quandoque quadrata radix etiam ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis. Ut, ſi velim radicem quadratam extrahere ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, ſive etiam ex $4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$; ſumo differentiam quadratorum ex terminis ejus, nempe 8; ejuſque quadratam radicem $2\sqrt{2}$ primo addo termino $4\sqrt{2}$, deinde ex eodem ſubtraho. Et quoniam ſumma quidem eſt $6\sqrt{2}$, reſiduum vero $2\sqrt{2}$; erunt $3\sqrt{2}$, & $1\sqrt{2}$, hoc eſt $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$ ſemiſſes ejus ſummæ, & ejus reſidui. Quumque
*art. 202. radices quadratæ horum ſemiſſium ſint * $\sqrt[4]{18}$, & $\sqrt[4]{2}$, erit $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$ radix quæſita.

265. Sed facile erit intelligere, quod, ut, ope illius regulæ, extrahi poſſit quadrata radix ex binomio aliquo, cujus uterque terminus ſit radicalis, neceſſe eſt, binomium illud hujuſmodi eſſe, ut differentia quadratorum ex terminis ejus, haud quidem ſit quadratum, ſed ut ejus quadrata radix rationem habeat commenſurabilem cum aliquo ex terminis propoſiti binomii: quo ſcilicet ei, tum addi, cum detrahi poſſit.

Ita

Ita ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ extracta eſt quadrata radix, quia $\sqrt{8}$, quæ eſt radix prædictæ differentiæ, rationem habet commenſurabilem cum $\sqrt{32}$. Nam, ſi ambæ radicales ad ſuas ſimpliciores expreſſiones reducantur, earum una fiet $2\sqrt{2}$, altera $4\sqrt{2}$.

III. Extractio radicis cubicæ ex binomiis.

266. Radicem cubicam, qualem optamus, extrahi poſſe, tam ex binomio, cujus unus terminus eſt rationalis, & alter radicalis, quam ex binomio, quod utrumque terminum hcbet radicalem; jam quidem ſuperius * oſtenſum fuit. Sed cujuſcumque formæ ſit binomium, unde radix cubica eſt extrahenda, illud ſane requiritur, quo radix extrahi poſſit, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, ſit cubus perfectus. *art. 252.

267. Referat namque indefinite $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ radicem cubicam alicujus binomii. Itaque, ſi fiat cubus ex $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, ipſum binomium erit $(m + 3n)\sqrt{m} + (3m + n)\sqrt{n}$. Jam quadratum prioris termini $(m + 3n)\sqrt{m}$ eſt $m^3 + 6m^2n + 9mn^2$; & quadratum alterius termini $(3m + n)\sqrt{n}$ eſt $9m^2n + 6mn^2 + n^3$. Quare, differentia inter utrumque quadratum erit $m^3 + 6m^2n + 9mn^2 - 9m^2n - 6mn^2 - n^3$, hoc eſt $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$; quam liquet eſſe cubum perfectum, quum ejus radix cubica ſit $m - n$.

268. Niſi ergo binomium propoſitum tale ſit, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit cubus perfectus, elici exinde nequit radix

cubica, qualem optamus. Ubi autem tale extiterit binomium, & adhuc unus ejus terminus fuerit rationalis, & alter radicalis, extrahetur ex eo radix cubica in hunc modum. Capiatur primo, tum radix cubica proxime major binomii propoſiti, cum radix cubica vera differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejuſdem binomii; & poſterior per priorem dividatur.

269. Deinde, ſi terminus rationalis major fuerit termino radicali, addatur quotiens, qui exinde oritur, cum eadem illa radice proxime majore. Et ſiquidem ſummæ hujus capiatur ſemiſſis ſine fractione, a cujus quadrato ſubducatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ; erit ſemiſſis ille pars rationalis, & radix quadrata reſidui, inde orti, pars radicalis quæſitæ radicis.

270. Quod ſi vero terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex ea diviſione producitur, ſubducatur ex radice illa proxime majore. Et ſiquidem reſidui hujus capiatur adhuc ſemiſſis ſine fractione, cujus quadrato addatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ; erit rurſus ſemiſſis ille pars rationalis, & radix quadrata ſummæ, inde ortæ, pars radicalis optatæ radicis.

271. In utroque porro caſu duæ iſtæ partes afficiendæ ſunt iiſdem omnino ſignis, quibus termini propoſiti binomii reperiuntur affecti. Jam enim monuimus ſupra *, quod, quum binomium unum habet terminum rationalem, & alterum radicalem; etiam radix ejus conſtare debet ex duabus partibus, altera rationali, & altera radicali. Nunc autem ſubjungimus, quod quo ſigno affi-

* art. 253.

afficitur in binomio terminus rationalis, eodem afficienda eſt quoque pars rationalis in quæſita radice; & ſimiliter, quo ſigno eſt affectus in binomio terminus radicalis, illud idem in radice parti radicali debet etiam adſcribi.

272. Extrahenda ſit igitur radix cubica ex binomio $100+51\sqrt{3}$. Quoniam $51\sqrt{3}$ valet circiter 88, erit totius binomii valor fere 188; adeoque ejus radix cubica proxime major erit 6. Quumque differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii ſit 2197, cujus radix cubica eſt 13: diviſo 13 per 6, fiet quotiens 13 : 6. Jam terminus rationalis 100 major eſt termino radicali $51\sqrt{3}$. Quare, juxta regulam * traditam, quotiens ille 13 : 6 addendus eſt cum radice cubica proxime majore 6; eritque 4 ſummæ ſemiſſis ſine fractione. Denique ex quadrato hujus ſemiſſis 16 ſubducatur radix cubica 13; quumque reſiduum ſit 3, erit $4+\sqrt{3}$ radix cubica quæſita. *art. 269

273. Extrahenda ſit etiam radix cubica ex binomio $25+22\sqrt{2}$. Quoniam $22\sqrt{2}$ valet circiter 31, erit totius binomii valor fere 56: proindeque ejus radix cubica proxime major erit 4. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii eſt 343, cujus radix cubica eſt 7; dividatur 7 per 4, & fiet quotiens 7 : 4. Jam in hoc alio exemplo terminus rationalis 25 minor eſt termino radicali $22\sqrt{2}$. Quare, juxta regulam * traditam, quotiens ille ſubducendus eſt ex radice cubica proxime majore 4; eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix cubica 7; quumque ſumma ſit 8, *art. 270

erit

erit $1 + \sqrt{8}$ radix cubica quæſita.

274. Sed notetur hic velim, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, non eſſe ſemper radicem cubicam propoſiti binomii. Eſt quippe ejus radix cubica, quotieſcumque hæc ex illo extrahi poteſt. Sed ſiquidem propoſitum binomium radicem non admittat, nec item inventa quantitas radix ejus cubica erit. Id autem non aliter cognoſci poteſt, quam rei periculo facto. Neque enim, in extrahenda radice cubica ex aliquo binomio, certo definire licet, num radix illa extrahi poſſit, nec ne. Nam, etſi quum differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt cubus perfectus, ea elici * nequeat; non hinc tamen extrahi viciſſim ſemper poterit, quum differentia illa cubus prodit perfectus.

* art. 266.

275. Quod autem dicimus, non poſſe extrahi radicem cubicam, ubi differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii, non eſt cubus perfectus; id intelligendum eſt, quotieſcumque quæſita radix non alias radicales, quam quadratas, debet continere. Verum, ſi de qualitate radicalium minime ſolliciti eſſe velimus, extrahi quandoque poterit radix cubica, etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt cubus perfectus. Nam, ſi ejus termini per iſtiuſmodi differentiam multiplicentur, producetur binomium aliud, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus. Unde, ſi ex novo iſto binomio radix cubica extrahi poteſt; eadem, diviſa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

276.

276. Ita in binomio $22 + \sqrt{486}$ differentia quadratorum ex terminis ejus, utpote 2, non eſt cubus perfectus. Unde ſi velim, extrahere radicem cubicam ex $22 + \sqrt{486}$; multiplico terminos ejus per 2; & orietur novum binomium $44 + 2\sqrt{486}$, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus eſt cubus perfectus 8. Quia autem alterius hujus binomii $44 + 2\sqrt{486}$ radix cubica eſt $2 + \sqrt{6}$; divido radicem iſtam $2 + \sqrt{6}$ per radicem cubicam prioris differentiæ, nimirum per $\sqrt[3]{2}$; & erit quotiens hujus diviſionis $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, ſive etiam $\sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{54}$ radix cubica prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

277. Atque hac ratione extrahi etiam quandoque poterit radix cubica ex binomio, cujus termini fractiones involvunt: nimirum auferendo per multiplicationem fractiones illas, & dividendo radicem cubicam novi binomii per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ vices geſſit multiplicatoris. Ut, ſi extrahenda ſit radix cubica ex binomio $(11:3) + \sqrt{(54:4)}$, multiplico utrumque terminum per 6, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$, in quo nullæ adſunt fractiones. Unde, quia novi hujus binomii radix * cubica eſt $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, divido eam per $\sqrt[3]{6}$; eritque $\sqrt[3]{(2:3)} + \sqrt[6]{(3:2)}$, ſive etiam $\sqrt[6]{(4:9)} + \sqrt[6]{(3:2)}$ radix cubica propoſiti binomii. *Art. 276.

278. Non diſſimili ratione extrahenda eſt radix cubica ex binomio, cujus uterque terminus eſt radicalis: nimirum, reddendo multiplicationis ope unum ex terminis ejus rationalem, & dividendo radicem cubicam novi binomii per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ vi-

ces geſſit multiplicatoris. Ita, ſi extrahenda ſit radix cubica ex binomio $11\sqrt{2} + \sqrt{243}$, cujus uterque terminus eſt radicalis; multiplico per $\sqrt{2}$ terminos ejus, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$, in quo unus tantum terminus eſt radicalis. Unde, quia alterius hujus binomii radix cubica * eſt $\sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{54}$; divido eam per radicem cubicam ipſius $\sqrt{2}$, hoc eſt per $\sqrt[6]{2}$; & erit quotiens $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{27}$, hoc eſt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radix cubica propoſiti binomii.

*Art. 276.

279. Cæterum, ſi radix cubica extrahenda non alias radicales, quam quadratas, debeat continere; facile erit inquirere, num ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis, radix cubica extrahi queat; eamque exhibere, ubi licet, illam elicere. Si enim termini propoſiti binomii ita ſimplicius exprimi poſſint, ut ſumma coefficientium ſit quadrupla ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium; & ut differentia eorundem coefficientium ſit dupla differentiæ, quæ inter eaſdem quantitates exiſtit: radix cubica extrahi poterit, eademque habebitur, ſi ex terminis illis ſui coefficientes deleantur.

280. Ita binomium $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ exprimi ſimplicius poteſt in hunc modum $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$. Unde, quia ſumma coefficientium $11 + 9$ eſt quadrupla quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, $2 + 3$; & differentia eorundem coefficientium $11 - 9$ eſt dupla differentiæ earundem quantitatum $3 - 2$; erit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radix cubica binomii $\sqrt{242} + \sqrt{243}$. Similiter binomium $\sqrt{578} + \sqrt{605}$ paulo ſimplicius exprimere licet hoc pacto $17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$. Eſt autem $17 + 11$ ad $5 + 2$, ut 4 ad 1; eſtque etiam $17 - 11$ ad $5 - 2$,

ut

ut 2 ad 1. Quare erit $\surd 2 + \surd 5$ radix cubica binomii $\surd 578 + \surd 605$.

281. Neque vero obſcura eſt hujus regulæ ratio. Nam cubus binomii $\surd m + \surd n$ eſt $(m + 3n)\surd m + (3m + n)\surd n$. Profecto autem, ſicuti clare patet, alterius hujus binomii radicem cubicam haberi, ſi ex terminis ejus deleantur coefficientes; ſic liquido etiam conſtat, in eodem binomio ſummam coefficientium $4m + 4n$ eſſe quadruplam ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium $m + n$; & differentiam eorundem coefficientium $2m - 2n$ eſſe duplam differentiæ earundem quantitatum.

IV. *Extractio aliarum radicum ex binomiis.*

282. Quantum ad radices altioris ordinis, extrahendas ex binomiis; ſatis erit, oſtendere, quo pacto eruendæ ſunt illæ, quæ ad poteſtates ordinis imparis referuntur. Nam, quantum ad eas, quæ referuntur ad poteſtates ordinis paris, haberi poſſunt per extractionem; vel ſolius quadratæ radicis; vel quadratæ ſimul, & cubicæ; vel demum quadratæ, & alterius ex iis, quæ ad poteſtates ordinis imparis altiores referuntur.

283. Ut, ſi extrahenda ſit radix quarta ex binomio $17 + 12\surd 2$, elicio primum ex illo radicem quadratam $3 + 2\surd 2$; deinde alterius hujus binomii ſumo adhuc radicem quadratam $1 + \surd 2$; & erit $1 + \surd 2$ radix quarta quæſita. Similiter, ſi extrahenda ſit radix ſexta ex binomio $99 + 70\surd 2$, eruo prius exinde radicem quadratam $7 + 5\surd 2$; tum novi hujus binomii ſumo radi-

dicem cubicam $1+\sqrt{2}$; & erit $1+\sqrt{2}$ radix ſexta propoſiti binomii.

284. Verum quidem eſt, eodem artificio extrahi quoque poſſe quamplures radices, quæ ad poteſtates ordinis imparis referuntur; veluti, exempli gratia, eſt radix nonæ poteſtatis, quæ per duplicem radicis cubicæ extractionem poteſt haberi. Sed haud quidem neceſſe eſt, radices iſtas excipere; quia regula, a nobis afferenda, pro extrahenda ex binomiis radice cujuſque ordinis imparis, non eſt diſſimilis ab illa, quam pro extractione radicis cubicæ ex iiſdem binomiis paulo ſuperius attulimus.

*Art. 255. 285. Et quidem, jam notavimus ſupra *, radicem quamvis ordinis imparis, quæ tantum radicales quadratas contineat, ad inſtar radicis cubicæ, elici poſſe, tam ex binomio, cujus unus terminus eſt rationalis, & alter radicalis, quam ex binomio, quod utrumque terminum habet radicalem. Sed cujuſcumque formæ ſit binomium, non aliter quæſita radix ex eo elicietur, quam ſi differentia quadratorum ex terminis ejus ſit poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur.

286. Referat namque indefinite $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ radicem quintam alicujus binomii. Itaque, ſi fiat quinta poteſtas ex $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, erit $(m^2+10mn+5n^2)\sqrt{m}+(5m^2+10mn+n^2)\sqrt{n}$ binomium ipſum. Jam quadratum prioris terminis $(m^2+10mn+5n^2)\sqrt{m}$ eſt $m^5+20m^4n+110m^3n^2+100m^2n^3+25mn^4$; & quadratum alterius termini $(5m^2+10mn+n^2)\sqrt{n}$ eſt $25m^4n+100m^3n^2+110m^2n^3+20mn^4+n^5$. Quare differentia inter utrumque quadra-

tum

tum erit $m^5 - 5m^4n + 10m^3n^2 - 10m^2n^3 + 5mn^4 - n^5$; quam liquet eſſe quadrato-cubum perfectum, cum radix ejus quadrato-cubica ſit $m - n$.

287. Niſi ergo binomium propoſitum tale ſit, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, elici exinde nequit radix optata. Ubi autem tale extiterit binomium, & adhuc unus ejus terminus fuerit rationalis, & alter radicalis; extrahetur ex eo quæſita radix in hunc modum. Capiatur primo, tum radix optata proxime major binomii propoſiti, cum radix non diſſimilis vera differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejuſdem binomii; & harum radicum poſterior per priorem dividatur.

288. Deinde, ſi terminus rationalis major fuerit termino radicali, addatur quotiens, qui exinde oritur, cum eadem illa radice proxime majore. Et ſiquidem ſummæ hujus capiatur ſemiſſis ſine fractione, a cujus quadrato ſubducatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentiæ; erit ſemiſſis ille pars rationalis, & radix quadrata reſidui, inde orti, pars radicalis quæſitæ radicis.

289. Quod ſi vero terminus rationalis minor fuerit termino radicali; tunc, qui ex ea diviſione producitur quotiens, ſubducatur ex radice illa proxime majore. Et ſiquidem reſidui hujus capiatur adhuc ſemiſſis ſine fractione, cujus quadrato addatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentiæ; erit rurſus ſemiſſis ille pars rationalis, & radix quadrata ſummæ, inde ortæ, pars radicalis optatæ radicis.

290. In utroque porro caſu duæ iſtæ partes afficiendæ ſunt iiſdem omnino ſignis, quibus termini propoſiti binomii reperiuntur affecti. Jam enim monuimus ſupra *, quod ubi binomium unum habet terminum rationalem, & alterum radicalem; etiam radix impar illius conſtare debet ex duabus partibus, altera rationali, & altera radicali. Nunc autem ſubjungimus, quod quo ſigno afficitur in binomio terminus rationalis, eodem afficienda eſt quoque pars rationalis in quæſita radice; & ſimiliter quo ſigno eſt affectus in binomio terminus radicalis, illud idem in radice parti radicali debet etiam adſcribi.

* art. 184.

291. Extrahenda ſit igitur radix quinta ex binomio $41 + 29\sqrt{2}$. Quoniam $29\sqrt{2}$ valet circiter 41, erit totius binomii valor fere 82; adeoque ejus radix quinta proxime major erit 3. Quumque differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii ſit unitas, erit eius radix quinta ſimiliter unitas: & propterea, diviſa unitate per 3, fiet quotiens $1:3$. Jam terminus rationalis 41 minor eſt termino radicali $29\sqrt{2}$. Quare, juxta regulam * traditam, quotiens ille $1:3$ ſubducendus eſt ex radice quinta proxime majore 3; eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix quinta prædictæ quadratorum differentiæ, quæ ſimiliter eſt 1; quumque ſumma ſit 2, erit $1 + \sqrt{2}$ radix quinta quæſita.

* art. 289.

292. Extrahenda ſit etiam radix ſeptima ex binomio $568 + 328\sqrt{3}$. Quoniam $328\sqrt{3}$ valet circiter 568, erit totius binomii valor fere 1136:

proin-

proindeque ejus radix ſeptima proxime major erit 3. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii eſt 128, cujus radix ſeptima eſt 2; dividatur 2 per 3, & fiet quotiens 2 : 3. Unde porro, quia terminus rationalis 568 hic etiam minor eſt termino radicali $328\sqrt{3}$; juxta regulam * traditam quotiens ille 2 : 3 *art. 289.
ſubducatur ex radice ſeptima proxime majore 3, & erit 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix ſeptima prædictæ quadratorum differentiæ, quæ erat 2; quumque ſumma ſit 3, erit $1 + \sqrt{3}$ radix ſeptima binomii propoſiti.

293. Cæterum hic etiam notare oportet, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, tunc demum eſſe radicem quæſitam, quum hæc ex propoſito binomio extrahi poteſt; nam ſiquidem propoſitum binomium radicem non admittat, nec item inventa quantitas erit ejus radix optata. Sed hic quoque non aliter id cognoſcere licet, quam rei periculo inſtituto. Neque enim, in extrahenda radice ordinis imparis ex aliquo binomio, certo definiri poteſt, num radix illa extrahi queat, necne. Nam, etſi, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur, ea elici non poſſit; non hinc tamen extrahi viciſſim ſemper poterit, quum differentia illa prodit illius ordinis poteſtas perfecta.

294. Sed quod dicimus, non poſſe extrahi radicem ex binomio, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt poteſtas perfecta illius ordinis, de quo agitur; hoc ita etiam oportet intelligatur, ubi quæſita radix non alias

radicales, quam quadratas, debet continere. Nam, ſi qualitatis radicalium nulla ratio velit haberi, extrahi quandoque poterit optata radix, etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt poteſtas perfecta illius ordinis. Multiplicentur etenim termini ipſius per eam illius differentiæ poteſtatem, quam deſignat exponens ordinis, primo minutus unitate una, & deinde dimidiatus; & novum habebitur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus poteſtas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur. Unde, ſi ex novo iſto binomio quæſita radix extrahi poſſit, eadem diviſa per radicem cognominem illius quantitatis, quæ vices geſſit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

295. Atque hoc artificio extrahi etiam quandoque poterit quæſita radix, tam ex binomio, cujus termini fractiones involvunt, quam ex binomio, cujus uterque terminus eſt radicalis. Nimirum, ſi multiplicationis ope in primo caſu tollantur fractiones, in ſecundo vero unus ex terminis propoſiti binomii reddatur rationalis. Nam in utroque caſu, ſi novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ geſſit vices multiplicatoris; fiet quotiens hujus diviſionis radix binomii propoſiti. Sed hæc omnia exemplis illuſtrare ſupervacaneum exiſtimamus; quum non diſſimilia ſint ab iis, quæ in extractione radicis cubicæ ſuperius adnotavimus.

296. Potius rationem allatæ regulæ juvabit hic breviter innuere. Nimirum, ſi $a + \surd bc$ referat radicem extrahendam, ſitque terminus ratio-

tionalis a major termino radicali $\sqrt{bc}$; fiet $a^2 - bc$ radix prædictæ quadratorum differentiæ: quæ, diviſa per $a + \sqrt{bc}$, dabit pro quotiente $a - \sqrt{bc}$. Sed, ſicuti quotiens iſte, additus cum $a + \sqrt{bc}$, dat ſummam $2a$, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; ita, ſi ab hujus quadrato a^2 ſubducatur $a^2 - bc$, remanebit bc, cujus quadrata radix eſt pars radicalis $\sqrt{bc}$. Quare, ſi loco ipſius $a + \sqrt{b}$ ſumatur radix proxime major; ob fractionem, quæ negligitur, adhuc eodem artificio quæſitæ radicis partes invenientur.

297. Quod ſi autem in aſſumpta radice $a + \sqrt{bc}$ terminus rationalis a minor ſit termino radicali $\sqrt{bc}$; fiet $bc - a^2$ radix prædictæ quadratorum differentiæ: quæ quidem ſi dividatur per $a + \sqrt{bc}$, vel, quod idem eſt, per $\sqrt{bc} + a$, habebitur quotiens $\sqrt{bc} - a$. Quemadmodum autem quotiens iſte ſubtractus ex $\sqrt{bc} + a$, relinquit $2a$, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; ita, ſi hujus quadrato a^2 addatur $bc - a^2$, orietur ſumma bc, cujus quadrata radix eſt pars radicalis $\sqrt{bc}$. Quare, ſi loco ipſius $a + \sqrt{bc}$ capiatur radix proxime major; ob fractionem, quæ negligitur, adhuc eadem operandi ratione quæſitæ radicis partes habebuntur.

V. Geneſis, & calculus radicalium univerſalium.

298. Eſt & alia ſpecies quantitatum radicalium, quæ dicuntur univerſales. Oriuntur eæ, quum ex aliquo binomio, per regulas, hactenus traditas, quæſita radix extrahi nequit. Tunc enim deſignabitur radix il-

la, adhibito ſigno alio radicali, quod ad utrumque binomii terminum ſe extendat. Hincque factum, ut eadem illa radix radicalis univerſalis ab Algebriſtis diceretur. Ita ex $2 + \surd 6$ quadrata radix elici nequit. Quare exprimetur ea per radicalem iſtam univerſalem $\surd (2 + \surd 6)$. Et, ob eandem rationem, quum ex $1 + \surd 2$ extrahi nequeat radix cubica, erit radicalis iſta univerſalis $\surd^3 (1 + \surd 2)$ cubicæ ejus radicis expreſſio.

299. Hujuſmodi radicales, raro accidit, ut ad calculum poni debeant. Interim, ſi quandoque contingat id fieri, ſciendum eſt, calculum ipſarum iiſdem omnino regulis peragi poſſe, quibus aliarum radicalium calculus peragitur. Itaque duplum, triplum, aut quadruplum radicalis univerſalis $\surd (2 + \surd 6)$ non aliter deſignabitur, quam per $2\surd (2 + \surd 6)$, $3\surd (2 + \surd 6)$ $4\surd (2 + \surd 6)$. Et quantitates illæ, extra ſignum exiſtentes, quæ hic etiam dicuntur coefficientes, collocabuntur intra ſignum, ſi evectæ ad poteſtatem, ab exponente ſigni denominatam, multiplicentur per omnes illas, quæ ſub ſigno reperiuntur. Qua ratione $2\surd (2 + \surd 6)$ idem erit, ac $\surd (8 + 4\surd 6$, ſive etiam $\surd (8 + \surd 96)$. Pariterque $2\surd^3 (1 + \surd 2)$ perinde valebit, ac $\surd^3 (8 + 8\surd 2)$, ſive etiam $\surd^3 (8 + \surd 128)$.

300. Præterea radicales univerſales reducuntur ad ſuos terminos ſimpliciores, collocando extra ſignum quicquid rationale ſimul, & commune extat in quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus. Sed, ad id facilius dignoſcendum, præſtat prius, ad
Art. 151. ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare radicales,
152. quæ ſub ſigno univerſali reperiuntur. Sit enim ad ſimpliciores ſuos terminos reducenda radicalis

lis univerſalis $\sqrt{(8+\sqrt{96})}$. Quoniam $\sqrt{96}$ perinde valet, ac $4\sqrt{6}$; erit $\sqrt{(8+\sqrt{96})}$ idem, ac $\sqrt{(8+4\sqrt{6})}$. Unde, quia maximus communis diviſor numerorum 8, & 4, ex quo radix quadrata elici poteſt, eſt ipſe numerus 4: proinde, collocata radice ejus extra ſignum, fiet $2\sqrt{(2+\sqrt{6})}$ quantitas propoſita, ad ſimpliciores ſuos terminos reducta.

301. Ulterius in calculo harum radicalium illud quoque requiritur, ut eæ, in quibus operationes inſtitui debent, ſint ejuſdem denominationis inter ſe. Unde, ſi radicales offerantur diverſæ denominationis, neceſſe eſt, eas ad eandem denominationem prius revocare. Fit porro hæc reductio eadem omnino ratione, qua in radicalibus ſimplicibus abſolvitur. Unde duæ iſtæ radicales univerſales $\sqrt{(2+\sqrt{6})}$, & $\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})}$ reductæ ad eandem denominationem, fient * $\sqrt[6]{(44+18\sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(7+4\sqrt{3})}$. Sed, ſi ad eandem denominationem reducendæ eſſent hæ aliæ duæ radicales $\sqrt{(2+\sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(3+\sqrt{3})}$, habebuntur * loco ipſarum duæ iſtæ $\sqrt[6]{(44+18\sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(3+\sqrt{3})}$.

*art. 154.

*art. 155.

302. Jam, quantum ad additionem, & ſubtractionem radicalium univerſalium, reducendæ prius ſunt illæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam, ſi ſubinde reductæ reperiantur habere eandem ſub ſignis radicalibus quantitatem; fiet additio, vel ſubtractio, addendo, vel ſubtrahendo coefficientes ipſarum. Quod ſi vero habeant ſub ſignis quantitates diverſas; tunc non aliter addi poterunt ſimul, vel a ſe invicem ſubtrahi, quam ſigno +, vel — adhibito. Ita, ſi radicales univerſales, ſimul addendæ, vel a ſe mu-

tuo ſubducendæ, ſint $\surd(50+\surd 3750)$, & $\surd(8+\surd 96)$; erit ſumma quidem $7\surd(2+\surd 6)$, reſiduum vero $3\surd(2+\surd 6)$; quia reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos fiunt $5\surd(2+\surd 6)$, & $2\surd(2+\surd 6)$. Sed, ſi addi debeant ſimul, vel a ſe invicem ſubtrahi radicales univerſales $\surd(8+\surd 96)$, & $\surd(4+\surd 32)$; ſumma quidem erit $\surd(8+\surd 96)+\surd(4+\surd 32)$, reſiduum vero $\surd(8+\surd 96)-\surd(4+\surd 32)$; quandoquidem, ſi reducantur ad ſimpliciores ſuos terminos, una fiet $2\surd(2+\surd 6)$, & altera evadet $2\surd(1+\surd 2)$.

303. Quantum vero ad multiplicationem, & diviſionem radicalium univerſalium, nulla opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione; ſed ſatis erit, per ſe mutuo multiplicare, vel dividere, tum coefficientes ipſarum, ſi quos habent, cum quantitates, ſub ſignis earundem exiſtentes. Qua ratione id, quod producitur, multiplicando $2\surd(3+\surd 3)$ per $5\surd(2+\surd 2)$, erit $10\surd(6+2\surd 3+3\surd 2+\surd 6)$. Nam, ſicuti ex multiplicatione coefficientium 2, & 5, producitur 10; ſic ex multiplicatione quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, $3+\surd 3$, & $2+\surd 2$, oritur quantitas $6+2\surd 3+3\surd 2+\surd 6$. Et, ob eandem rationem, quotiens, qui gignitur, dividendo $12\surd(8+\surd 50)$ per $2\surd(3+\surd 2)$, erit $6\surd(2+\surd 2)$. Nam, ſicuti ex diviſione coefficientium 12, & 2 producitur 6; ita ex diviſione quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, $8+\surd 50$, & $3+\surd 2$, oritur quantitas $2+\surd 2$.

304. Nulla etiam opus eſt reductione ad ſimpliciores ſuos terminos, quum radicales univerſales ad poteſtatem aliquam ſunt elevandæ; quum

quum ſatis ſit, ad poteſtatem illam evehere, tam coefficientes ipſarum, ſi quos habent, quam quantitates, exiſtentes ſub ſignis earundem. Ita, ſi radicalis univerſalis $3\sqrt{3}\,(2+\sqrt{7})$ elevanda ſit ad quadratum, fiet quadratum iſtud $9\sqrt{3}\,(11+4\sqrt{7})$. Nam, ſicuti quadratum coefficientis 3 eſt 9; ita quadratum quantitatis $2+\sqrt{7}$, ſub ſigno exiſtentis, eſt $11+4\sqrt{7}$. Et ſimiliter, ſi radicalis univerſalis $2\sqrt{}\,(2+\sqrt{6})$ elevanda ſit ad cubum, fiet cubus iſte $8\sqrt{}\,(44+18\sqrt{6}$. Nam, ſicuti cubus coefficientis 2 eſt 8; ita cubus quantitatis, ſub ſigno exiſtentis, $2+\sqrt{6}$ eſt $44+18\sqrt{6}$.

305. Denique, nec item requiritur reductio ulla ad ſimpliciores ſuos terminos, ubi ex radicali aliqua univerſali radix quævis extrahi debet; quum ſatis ſit, radicem illam elicere, tam ex ejus coefficiente, ſi quem habet, quam ex quantitate, ſub radicali ſigno exiſtente. Qua ratione quadrata radix radicalis univerſalis $9\sqrt{3}\,(11+4\sqrt{7})$ eſt $3\sqrt{3}\,(2+\sqrt{7}$. Nam, ſicuti quadrata radix coefficientis 9 eſt 3; ſic quadrata radix quantitatis $11+4\sqrt{7}$, ſub ſigno exiſtentis, eſt $2+\sqrt{7}$. Pariterque radix cubica radicalis univerſalis $8\sqrt{}\,(44+18\sqrt{6})$ erit $2\sqrt{}\,(2+\sqrt{6})$. Nam, quemadmodum radix cubica coefficientis 8 eſt 2; ita radix non diſſimilis quantitatis, ſub ſigno exiſtentis, $44+18\sqrt{6}$ eſt $2+\sqrt{6}$.

306. Quod ſi radix optata elici nequeat, ſive ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, ſive ex coefficiente radicalis univerſalis; tunc, repoſito coefficiente intra ſignum, ſatis erit, multiplicare exponentem ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Ita, ſi quæratur quadrata radix

radicalis univerſalis $2\sqrt[3]{}(2+\sqrt{6})$, ea nec ex coefficiente 2, nec ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $2+\sqrt{6}$ elici poterit. Quare, collocato intra ſignum coefficiente 2, & multiplicato indice ſigni 3 per indicem quæſitæ radicis 2, fiet $\sqrt[6]{}(16+8\sqrt{6})$ radix quæſita. Et ſimiliter, ſi ex radicali univerſali $8\sqrt{}(1+\sqrt{2})$ extrahenda ſit radix cubica, ea ex coefficiente 8 elici quidem poterit, ſed non item ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $1+\sqrt{2}$. Quare, extracta illa ex coefficiente, & multiplicato indice ſigni radicalis 2 per indicem quæſitæ radicis 3, fiet $2\sqrt[6]{}(1+\sqrt{2})$ radix optata.

307. Cæterum nolo hic reticere, quod beneficio radicalium univerſalium, eadem illa regula, ſuperius * tradita, extrahi poſſit quadrata radix ex quocumque binomio. Oporteat enim, quadratam radicem elicere ex binomio $8+\sqrt{32}$. Quoniam differentia quadratorum ex terminis ejus eſt 32, erit $4\sqrt{2}$ quadrata radix hujus differentiæ. Unde ſi ea, addatur primo termino rationali 8, & deinde ex eodem ſubducatur; erit $4+2\sqrt{2}$ ſummæ ſemiſſis, & $4-2\sqrt{2}$ ſemiſſis reſidui: proindeque quadrata radix propoſiti binomii erit $\sqrt{}(4+2\sqrt{2})+\sqrt{}(4-2\sqrt{2})$. Interim fatendum hoc loco eſt, quod exhibendo quæſitam radicem in hunc modum, qui ſit valor ejus, multo difficilius intelligitur, quam ſi dicamus, eam extrahi non poſſe, & exhibeamus eandem per unicam radicalem univerſalem hoc pacto $\sqrt{}(8+\sqrt{32})$.

* art. 259.

CA-

CAPUT IV.

Natura quantitatum imaginariarum.

308. PErtinet ad hunc locum doctrina de quantitatibus imaginariis, ut quæ ſuam ex extractione radicum originem habentes, ſimiliter velut quantitates radicales debent haberi. Quantitates iſtæ imaginariæ ſunt maximi uſus in Matheſi, ob eandem illam impoſſibilitatem, per quam vulgo dicuntur imaginariæ. Limites namque ejus, quod poſſibile eſt, per ipſas nobis innoteſcunt; & quouſque id, quod ſemel evadit impoſſibile, ſubinde perſeverat, ab iiſdem etiam edocemur. Itaque de hujuſmodi quantitatibus paulo accuratius agendum nobis erit: quem in finem primo in earum naturam, ac indolem ſedulo inquiremus; tum, qua ratione calculus earundem peragi debeat, breviter oſtendemus.

I. Geneſis quantitatum imaginariarum.

309. RAdices ex quantitatibus extrahi non poſſunt, non modo quum quantitates non ſunt poteſtates perfectæ ejus ordinis, de quo agitur; verum etiam quum tali ſigno afficiuntur, ut qua ratione produci queant, intelligi non poſſit. Sic ex quantitate ab elici nequit quadrata radix; quia ipſa quantitas ab non eſt quadratum perfectum. Sed quadrata radix quantitatis negativæ $-a^2$, nec item poteſt

haberi; quia quantitas iſta, velut negativa, intelligi non poteſt, qua ratione producatur.

310. Si enim quantitatem inſpicias, omni prorſus ſigno denudatam, diceres eſſe a quadratam radicem ipſius; at ubi eam coſideras, velut affectam ſigno $-$, pro ejus latere a nullum comperies ſignum, ut ex illius in ſe ipſum multiplicatione negativa illa quantitas poſſit oriri. Non enim affici poterit ſigno $+$; quia, multiplicando $+a$ per $+a$ producitur $+a^2$. Sed nec etiam licebit, latus illud afficere ſigno $-$; quandoquidem, ſi multiplicetur $-a$ per $-a$, per regulam multiplicationis, ſuperius * traditam, adhuc producitur $+a^2$.

* art. 36.

311. Facienda eſt itaque diſtinctio inter poteſtates numeri paris, & poteſtates numeri imparis. Iſtæ etenim eſſe poſſunt, tam poſitivæ, quam negativæ. Nam, ſicuti oriuntur poſitivæ, quum radices, ad quas referuntur, ſunt itidem poſitivæ; ſic per contrarium prodeunt negativæ, quum ipſæ etiam radices negativæ aſſumuntur. Sed illæ nonniſi poſitivæ eſſe poſſunt; quandoquidem, tam quantitatum poſitivarum, quam quantitatum negativarum poteſtates numeri paris poſitivæ ſemper oriuntur.

312. Hac ratione cubus quantitatis poſitivæ a eſt quantitas itidem poſitiva a^3, & cubus quantitatis negativæ $-a$ eſt quantitas ſimiliter negativa $-a^3$. Nam, ſicuti, multiplicando a bis per ſe ipſam, producitur a^3; ſic erit $-a^3$ id, quod producitur, multiplicando $-a$ bis per ſe ipſam. Sed quadratum, tam quantitatis poſitivæ a, quam quantitatis negativæ $-a$, eſt quantitas poſitiva a^2. Nam, per regulam multipli-

plicationis, ſuperius * traditam, producitur * art. 36.
ſemper a^2, ſive multiplicetur a per a, ſive $-a$
per $-a$.

313. Atque hinc diſcimus primo, radices ex poteſtatibus numeri imparis extrahi poſſe, quocumque ſigno ſint affectæ, hoc eſt, tam ſi ſint poſitivæ, quam ſi ſint negativæ; ſed non item ex poteſtatibus numeri paris, quum ex iſtis tunc demum radices extrahi queant, ubi ipſæ poteſtates ſunt poſitivæ. Diſcimus ſecundo, radices, quæ referuntur ad poteſtates numeri imparis, eſſe ſemper ejuſdem naturæ cum ipſis poteſtatibus; hoc eſt poſitivas, vel negativas, prout poteſtates ipſæ ſunt poſitivæ, vel negativæ. Diſcimus demum, poteſtates poſitivas numeri paris duas radices habere, unam poſitivam, & alteram negativam: adeo, ut ea, quæ deeſt poteſtatibus negativis numeri paris, accreſcat iis, quæ ſunt poſitivæ.

314. Ut ergo ad id, quod erat præcipuum, redeamus, impoſſibilitas, quæ in extrahendis radicibus occurrit, ex duplici quidem capite poteſt oriri. Primo ex eo, quod quantitas propoſita non eſt poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur. Et deinde ex eo, quod oblata quantitas eſt negativa, & quæſita radix refertur ad poteſtatem numeri paris. Utroque caſu deſignant Algebriſtæ radicem extrahendam, præfigendo quantitati ſignum radicale, cujus index radicem illam oſtendat. Nam, ſicuti radicem quadratam, quæ elici nequit ex ab, exprimunt per $\sqrt{ab}$; ita quadratam radicem, quæ erui non poteſt ex $-a^2$ ratione negationis, deſignant per $\sqrt{-a^2}$.

315.

315. Jam impoſſibilitas, quæ in extrahendis radicibus oritur ex primo capite, occaſionem præbuit Algebriſtis, ut diſtinguerent quantitates in commenſurabiles, ſeu rationales, & incommenſurabiles, ſeu radicales. Ex impoſſibilitate autem, quæ in eadem radicum extractione oritur ex ſecundo capite, nata eſt alia quantitatum diſtinctio, qua fit, ut quædam ſint reales, hoc eſt vere, ac realiter exiſtentes; quædam vero imaginariæ, hoc eſt, quæ tantum finguntur, ac imaginantur.

316. Id quum ita ſit, perſpicuum eſt, quantitates imaginarias eſſe radices numeri imparis, extrahendas ex quantitatibus negativis; eaſdemque tale nomen ſortitas eſſe, quia non ſunt quantitates vere, ac realiter exiſtentes, ſed tantum fictitiæ, ac ideales. Jam, ſi vulgus conſulas Algebriſtarum, vix aliud circa impoſſibilitatem harum radicum ab iis edoceberis, quam quia intelligi non poteſt, quo ſigno affici debeant, ut producant poteſtates, ad quas referuntur.

317. Verum hæc ratio evincit quidem impoſſibilitatem hujuſmodi radicum; ſed unde nam proprie ea oriatur, minime nobis oſtendit. Conabimur ergo, aliam hic nos rationem afferre, quæ harum radicum impoſſibilitatem in propatulo ponat. Quumque alia hæc ratio ex natura quantitatum poſitivarum, ac negativarum, velut ex fonte ſuo proprio, ſit deducenda; hanc prius oportet ut paulo clarius oſtendamus.

II. No-

II. Natura quantitatum poſitivarum, & negativarum.

318. DIximus ſuperius *, quantitates poſitivas eſſe illas, quas ſignum + præcedit; quantitates vero negativas, quæ ſigno — afficiuntur. Sed eodem in loco explicuimus etiam, quo pacto verum eſſe poſſit illud, quod vulgo dicunt Algebriſtæ, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates vero negativas eſſe nihilo minores: nimirum, quia, zero ſeu nihil, quantitatibus additum, earum valorem, nec auget, nec minuit; adeoque dicendum eſt nihilo majus, quod potis eſt, alicujus quantitatis valorem augere; & viciſſim nihilo minus, quod per contrarium quantitatis alicujus valorem minuere valet.

* Art. 151. 152.

319. Hinc vero conſequitur, quantitates dicendas eſſe negativas, non quidem in ſe ipſis conſideratas, ſed relate ad eas, de quibus negant valorem ſuum. Verum hoc facile quidem intelligitur, quum negativæ quantitates adhærent aliis poſitivis, quæ ipſis ſunt majores; ſed non æque facile concipi poteſt, quum eædem quantitates negativæ, vel ſolæ ponuntur, vel adhærent quantitatibus aliis poſitivis, quæ ipſis ſunt minores. Quid enim ſignificet expreſſio iſta 7 — 5, nemo non videt. Per eam namque valor numeri 5 negatur de valore numeri 7; adeoque tantum indicatur valor numeri 2. Sed, quid ſibi velit — 2, aut 5 — 7, non ita liquido conſtat. Nam in priore caſu negatio numeri 2 ad nullam quantitatem refertur; in ſecun-

do vero caſu numerus, qui negatur, 7 major eſt illo, de quo negatur, 5.

320. Itaque illud hic oportet oſtendamus, qua ratione fieri poſſit, ut quantitates negativæ, vel ſolæ reperiantur, vel adhæreant quantitatibus aliis poſitivis, quæ ipſis ſint minores. Id explicant Algebriſtæ primo, mediantibus debitis, & creditis. Quemadmodum enim credita ſunt bona poſitiva, quia peculium augent; ita debita conſiderari poſſunt, veluti bona negativa, quia peculium minuunt. Unde, ſicuti, quum quis centum habet crediti, & quadraginta debiti, dicimus, peculium ejus eſſe 100 — 40; ita viciſſim, quum habet quadraginta crediti, & centum debiti, dici poteſt, quod peculium ejus ſit 40 — 100. Et ſimiliter, ſicuti, quum quis habet centum crediti, & nihil debiti, dicimus peculium eſſe 100; ita viciſſim, quum habet centum debiti, & nihil crediti, dici poteſt, quod peculium ejus valeat — 100.

321. Hoc idem explicant quoque motu locali, in quo progreſſus dici poteſt motus poſitivus, quia auget iter confectum, & minuit conficiendum; regreſſus motus negativus, quia per contrarium minuit iter confectum, augetque conficiendum. Si enim aliquem promoveri ſup-
FIG. 1. ponamus ab A verſus B pedibus quinque, tumque retrocedere a B ad C pedibus tribus; dicemus, eum promotiorem reperiri in C, quam in A, pedibus 5 — 3. Sed ſi retrocedat a B ad D pedibus ſeptem, dicendus eſt promotior in D, quam in A, pedibus 5 — 7. Et eadem ratione, ſi aliquis iter confecturus ab A verſus B, proceſſerit ab A ad C pedibus duobus; dicemus, reſpe-

ſpectu itineris conficiendi, eum promotiorem eſſe in C, quam in A, pedibus 2. Sed ſi viciſſim retroceſſerit ab A ad D pedibus duobus; tunc dicendus eſt ille promotior in D, quam in A, pedibus — 2.

322. Utroque hoc exemplo abunde liquet, quantitates, quæ dicuntur negativæ, eſſe perinde reales, quam quæ vocantur poſitivæ; ſed omne diſcrimen inter eas in eo poſitum eſſe, quod quantitates negativæ interpretandæ ſunt ſenſu contrario ei, quo poſitivas quantitates interpretamur. Nam, ſicuti, quum dicimus, peculium alicujus eſſe 60, intelligimus, eum tantundem in bonis habere, ut ſexaginta perſolvere poſſit; ita viciſſim, quum dicimus, alicujus peculium valere — 60, ſenſus eſt, quod ei deſunt ſexaginta, ut dici poſſit in neutro ſtatu conſiſtere. Et ſimiliter, ſicuti, quum dicimus, aliquem dati itineris pedum decem confeciſſe pedes 4, ſenſus eſt, eum tali in loco verſari, ut illius itineris nonniſi ſex pedes conficere debeat; ita per contrarium, quum dicimus, dati itineris pedum decem confectos eſſe ab aliquo pedes — 4, illud ita intelligendum eſt, ut conficere debeat pedes quatuordecim, quo ad præfixam perveniat metam.

323. In Geometria ergo, ubi quantitates per longitudines linearum deſignantur, ſi recta, verſus plagam aliquam ducta, habeatur, velut poſitiva; erit negativa, quæ ducitur verſus plagam oppoſitam. Ut, ſi ex eodem puncto A ducatur verſus dextram recta AB, & verſus ſiniſtram recta AC, ponaturq; prior AB poſitiva, altera AC pro negativa habenda erit. Atque hac ratione, FIG. 2.

re-

rectas negativas minuere valorem poſitivarum, perſpicuum quidem eſt. Nam, ſicuti rectæ poſitivæ DA addendo rectam ſimiliter poſitivam AB, conficitur DB, major quidem, quam DA; ita, ſi eidem rectæ poſitivæ DA addatur recta negativa AC, conficietur DC minor quidem, quam DA. Sed liquet etiam, quod, ſicuti recta poſitiva DA, per appoſitionem negativæ AC, omnino in nihilum redigitur, quum AC eſt æqualis ipſi DA; ita eadem recta poſitiva DA, per appoſitionem negativæ AC, evadit negativa, quum AC eſt major quidem, quam DA.

324. Eadem ratione in Arithmetica, ubi quantitates per numeros exprimuntur, ſi numeri, qui a zero progrediuntur, habeantur, tamquam poſitivi; erunt negativi, qui viciſſim a zero regrediuntur. Et quoniam iſte numerorum a zero regreſſus omnino opponitur progreſſui; liquet, numeros negativos, additos poſitivis, minuere debere valorem eorum; adeoque expreſſionem iſtam $7 - 5$ tantundem ſignificare, quam 2. Sed, ob eandem rationem, perſpicuum eſt quoque, numeros poſitivos, per additionem negativorum, poſſe omnino in nihilum redigi, ſi ſcilicet numeri negativi æquales fuerint poſitivis; & poſſe item in negativos abire, ſi nempe negativi, qui adduntur, majores fuerint poſitivis, quibus adjiciuntur. Ita $4 - 4$ perinde valet, ac zero, ſeu nihil; & $4 - 6$ idem eſt, ac $- 2$.

325. Sed, qua demum ratione numeri negativi poſſint eſſe perinde reales, ac poſitivi; ſcio equidem, non ita facile concipi poſſe. Numerorum quippe ea communiter ſtatuitur natura, ut, per continuam unitatis additionem, omnes a

ze-

zero progrediantur. Unde fictitii videntur eſſe numeri illi, qui viciſſim a zero regrediuntur. Et ſane ſic ſtatui debet, ſi numeri conſiderentur in abſtracto, hoc eſt, quatenus exiſtunt in ideis noſtræ mentis. Sed non idem judicium ferendum eſt, ubi numeri conſiderantur in concreto, rebuſque phyſicis, ac realibus deſignandis applicantur. Tunc enim, præter numeros poſitivos, diſtinguendi ſunt etiam numeri negativi; ut ſcilicet per eos deſignari poſſit ſtatus rerum contrarius ei, quem deſignant numeri poſitivi.

326. Ita, ſi quæſtio ſit de elevatione ſolis ſupra horizontem; ad numeros pertinebit, elevationis ejus gradus definire. Sed quoniam elevationi opponitur depreſſio, ſi numeri poſitivi deſignant gradus elevationis, deſignabunt viciſſim numeri negativi gradus depreſſionis. Unde, quemadmodum, quum dicimus, ſolem elevatum eſſe ſupra horizontem gradibus 10, ſenſus eſt, quod ſol ſupra horizontem aſſurgit ad altitudinem graduum decem; ita ſi dicatur ſol elevatus ſupra horizontem gradibus —10, non aliud id ſignificabit, quam quod ſol gradibus decem infra horizontem depreſſus reperiatur.

III. *Exiſtentia numerorum negativorum plenius vindicata.*

327. Diximus paulo ſuperius *, diſtinctionem numerorum in negativos, & poſitivos locum habere, ubi numeri conſiderantur in concreto, & non in abſtracto; hoc eſt, quum eos uſurpamus, ad deſignandas res phyſicas, & realiter exiſtentes. Sed id, tantum *art. 325.

tum

tum abeſt, ut exiſtentiam numerorum negativorum in Arithmetica adſtruere videatur, quin potius ab ea illos excludit, ac penitus arcet. Numeri enim in Arithmetica conſiderantur in abſtracto, & non in concreto. Unde, ſi numerorum negativorum ortus ipſis rebus, quas deſignant, ferri debet acceptus; nulli plane erunt in Arithmetica numeri negativi.

328. Huic ergo errori præcavendo, præſtat numerorum naturam, ac indolem paulo accuratius hoc loco expendere. Nimirum numeri, prout ſubſiſtunt in ideis noſtræ mentis, nihil ſignificant certi, atque diſtincti. Id autem vel ex eo liquere poteſt, quod quamlibet quantitatem quocumque numero indifferenter appellare licebit. Ulnam enim, exempli gratia, ſi velut indiviſam conſideremus, nihil vetat, vocare unitatem; ſed ſi eam, velut compoſitam ex duabus, tribus, aut quatuor partibus inſpiciamus, poterimus æquo jure, eandem appellare binarium, ternarium, aut quaternarium: idque, tam ſi partes illæ ſint æquales, quam ſi magnitudine a ſe invicem differant. Nam non minus dicimus duos montes, quum ii ſunt æquales, quam quum alter eſt altero major.

329. Ex eo autem, quod numeri in ideis noſtræ mentis, nihil ſignificant certi, ac abſoluti, nec ex unitatibus æqualibus conſtant; conſequitur, eoſdem tali pacto conſideratos, nec item inter ſe rationem ullam determinatam habere. Itaque inter binarium, & ternarium, prout ſubſiſtunt in mente noſtra, nulla erit certa, ac determinata ratio. Aliter enim omnis quantitas ad omnem aliam quantitatem poterit quamcumque

ra-

rationem habere; quia, ut jam dictum eſt *, quælibet quantitas poteſt quocumque numero deſignari. Et pari jure, nec binarius additus ternario facit quinarium, nec ſenarius ſubductus ex denario relinquit quaternarium. *Art.325.

330. Id quum ita ſit, liquet, numeros, prout ſubſiſtunt in ideis noſtræ mentis, non eſſe objectum Arithmeticæ. Nam in ea conſiderantur numeri, velut capaces incrementi, ac decrementi, & ceu determinatam inter ſe mutuo rationem habentes; cujuſmodi plane * non ſunt numeri, qui animo noſtro obverſantur. Unde fateamur oportet, numeros, quos conſiderat Arithmetica, ſuas ſortiri proprietates a rerum, quas deſignant, indole, atque natura: adeo, ut ſi iſtæ ſint cognomines, ac homogeneæ, in tantum, ut una alterius adjectione, aut detractione augeri poſſit, aut minui, ſimulque collatæ rationem habeant inter ſe; ipſi etiam numeri iis gaudeant attributis. *Art.329.

331. Hinc obiter notari hoc loco poteſt, quantum a vero deflectant, qui cenſent, lineam bipedalem, additam alteri lineæ bipedali, idcirco facere lineam quadrupedalem, quia in ideis noſtræ mentis bis duo ſunt quatuor. Si enim ita res eſſet, linea bipedalis, addita lineæ bipalmari, pari jure conficere deberet lineam quadrupedalem, quadripalmarem, vel utcunque quaternario numero denominatam: quod nemo dixerit ſanæ mentis. Si ergo id poſtremum abludit a vero, quia numeri in iſto caſu non deſignant res homogeneas; bis duo facient quatuor, non ex abſtracta numerorum cognitione, ſed ex conditione rerum, quibus applicantur.

332. Ex quibus omnibus jam illud abunde conſequitur, non poſſe numeros ad calculum poni, ac inter ſe mutuo conferri, niſi ex ideis noſtræ mentis ad deſignandas res vere, ac realiter exiſtentes traducantur. Unde numerorum negativorum exiſtentia omnino in Arithmetica debet admitti. Nam rerum exiſtentium nullus dari poteſt ſtatus, cui alter oppoſitus, ac plane contrarius non correſpondeat. Quare admittendi ſunt numeri negativi, ut per eos deſignari poſſit ſtatus rerum contrarius ei, ſub quo per numeros poſitivos primo ſub contemplationem cadunt.

333. Quod autem paſſim dici ſolet, numeros in Arithmetica conſiderari in abſtracto, & non in concreto; illud ita intelligi debet, quod de iis ſubinde agunt Arithmetici, ut omnes omnino res, quæ ſunt cognomines, ac homogeneæ, ſimul exhibeant. Atque hoc vel ex eo liquere poteſt, quod univerſalis illa, & abſtracta Mathematicorum Arithmetica multum differt ab Arithmetica vulgi. Hæc enim contemplatur numeros, prout primo inſunt in ideis noſtræ mentis, nec ideo eſt ſollicita de qualitate unitatum, ex quibus numeri cenſentur compoſiti. Sed Arithmetica Mathematicorum, a rebus ad animum rurſus numeros revocans, non aliter, quam æquales, unitates in iis agnoſcit.

334. Nimirum Mathematici, quum de numeris generatim ediſſerunt, avocant rurſus eos a rebus ad mentem, ſed relinquunt in iis attributa illa, quæ ipſorum ad res homogeneas applicatione ſemel ſortita fuerunt. Itaque unitatem, ex cujus repetita additione numeros oriri concipiunt, ponunt ſemper eandem, ac immuta-

tam:

tam:quo ſit,ut numeri ipſi ſimul addi, ſubtrahiq; a ſe invicem poſſint; & inter ſe collati, certam, determinatamque habeant rationem. Sed, ſicuti hæc omnia manent numeris, ubi rurſus a rebus ad animum redeunt; ita & ipſa numerorum diſtinctio in poſitivos, & negativos quoque maneat neceſſe eſt.

335. Cæterum ex eo, quod ſejungi nequeat a numeris ratio poſitivi, ac negativi, illud modo colligi poteſt, quod in multiplicatione numerorum ille, qui vices gerit multiplicatoris, non ſolum oſtendere debet, quoties numerus multiplicandus ſumi debeat, verum etiam, in quo ſtatu ſit reponendus relate ad eum, in quo jam reperitur: adeo, ut vera multiplicationis idea hæc erit, ut numerus multiplicandus toties collocari debeat in ſtatu, a multiplicatore deſignato, quot unitates continet ipſe multiplicator. Unde, ſi tam multiplicandus, quam multiplicator fuerit negativus, collocandus ille erit in ſtatu, qui ſit negativus negativi, hoc eſt in ſtatu poſitivo: & proinde id, quod oritur ex multiplicatione duorum numerorum negativorum, erit poſitivum, & non negativum.

336. Similiter in diviſione numerorum ille, qui vices gerit diviſoris, non ſolum oſtendere debet, quota pars numeri dividendi capi debeat, verum etiam in quo ſtatu pars illa ſit collocanda relate ad eum, in quo jam reperitur: adeo, ut vera notio diviſionis hæc erit, ut numeri dividendi ea pars collocari debeat in ſtatu, deſignato a diviſore, quam diviſor ipſe denominat ſuis, quas continet, unitatibus. Unde, ſi tam dividendus, quam diviſor fuerit negativus, collocanda erit pars

illa in ſtatu, qui ſit negativus negativi, hoc eſt in ſtatu poſitivo: & propterea id, quod oritur ex diviſione duorum numerorum negativorum, erit poſitivum, & non negativum.

IV. *Quid proprie ſit radicum extractio, quodve criterium proportionis.*

337. Explicata natura quantitatum poſitivarum, ac negativarum; haud difficile modo erit, oſtendere impoſſibilitatem earum quantitatum, quæ vulgo dicuntur imaginariæ. Et quoniam hujuſmodi quantitates ſuam originem * trahunt ab extractione radicum ordinis paris ex quantitatibus negativis; juvat prius adnotare, quod problemata de radicibus extrahendis ſint eadem omnino cum iis, in quibus inter duas datas quantitates unam, aut plures medias proportionales oportet invenire. Nam, profecto reperitur una media proportionalis, quum extrahenda eſt radix quadrata; reperiuntur duæ mediæ proportionales, quum quæſtio eſt de radice cubica; tres mediæ, quum agitur de radice quadrato-quadrata; atque ita deinceps.

* art. 316.

338. Neque vero difficile id erit oſtendere. Sit enim primo extrahenda quadrata radix ex numero 10. Dico, perinde eſſe, ac ſi quæratur media proportionalis inter unitatem, & ipſum numerum 10. Ponatur ſiquidem, quod x ſit media iſta proportionalis; & eo res redit, ut oſtendamus, quantitatem x, ductam in ſe ipſam, producere numerum 10. Id vero liquet abunde. Nam, quum 1 ſit ad x, ut x ad 10; erit quoque, ut 1 ad xx, ita 1 ad 10; adeoque, quia in omni

pro-

proportione productum mediorum eſt æquale producto extremorum, erit xx, hoc eſt quadratum ipſius x æquale dato numero 10.

339. Sit ſecundò elicienda radix cubica ex eodem numero 10. Dico, perinde eſſe, ac ſi quæratur prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem, & ipſum numerum 10. Ponatur ſiquidem, quod x ſit prima earum mediarum proportionalium; jamque eo res redit, ut oſtendamus, cubum quantitatis x æqualem eſſe numero 10. Id vero oſtendemus in hunc modum. Quoniam ex hypotheſi quantitas x eſt prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem, & numerum 10; erit, ut 1 ad x^3, ita 1 ad 10. Unde, quia in omni proportione productum ex mediis æquale eſſe debet producto ex extremis; erit x^3, hoc eſt cubus ipſius x æqualis dato numero 10.

340. Sit tertio eruenda radix quadrato-quadrata ex eodem adhuc numero 10. Dico, perinde eſſe, ac ſi quæratur prima ex tribus mediis proportionalibus inter unitatem, & ipſum numerum 10. Ponatur ſiquidem, quod x ſit prima earum mediarum proportionalium; jamque eo res redit, ut oſtendamus, quadrato-quadratum quantitatis x æquale eſſe numero 10. Id vero oſtendemus hac ratione. Quoniam ex hypotheſi quantitas x eſt prima ex tribus mediis proportionalibus inter unitatem, & numerum 10; erit, ut 1 ad x^4, ita 1 ad 10. Eſt autem in omni proportione productum ex mediis æquale producto ex extremis. Itaque erit x^4, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius x æquale dato numero 10.

341. Non diſſimiliter oſtendetur, inveniendam eſſe primam ex quatuor mediis proportionalibus inter unitatem, & datum numerum in extractione radicis quintæ; primam ex quinque mediis in extractione radicis ſextæ; primam ex ſex mediis in extractione radicis ſeptimæ; atque ita deinceps. Quæ omnia exinde dependent, quod, ſicuti trium quantitatum proportionalium prima ad tertiam duplicatam habet rationem primæ ad ſecundam; ita, ſi quotcumque fuerint quantitates continue proportionales, prima ad ultimam rationem habebit toties multiplicatam primæ ad ſecundam, quot ſunt ipſæ quantitates, una dempta.

342. Jam, quum problemata de radicibus extrahendis non differant ab iis, in quibus unam, aut plures medias proportionales inter duas datas quantitates oporteat invenire; non alia meliore ratione oſtendi poterit impoſſibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, quam oſtendendo inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam poſſe quidem reperiri numerum parem mediarum proportionalium, hoc eſt duas, quatuor, ſex; ſed non item numerum imparem, puta unam, tres, quinque. Nam oriuntur* quantitates imaginariæ, quum ex quantitatibus negativis extrahendæ ſunt radices numeri paris; hoc * eſt, quum inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam impar numerus mediarum proportionalium debet inveniri.

*art. 316. *art. 317.

343. Ad hoc autem oſtendendum, neceſſe eſt, certum in primis criterium ſtatuere, quo mediante nullo negotio cognoſci poſſit, num quatuor

tuor quantitates ſint proportionales, nec ne. Neque enim ea, quæ paſſim afferuntur, poſſunt huic rei oſtendendæ uſui nobis eſſe; quum omnia ſupponant, quantitates, quæ comparantur inter ſe mutuo, eſſe unius, ejuſdemque ſtatus; hoc eſt, vel omnes poſitivas, vel omnes negativas. Operæ pretium eſt ergo, aliud ſancire criterium, quod etiam ad quantitates diverſi ſtatus ſe extendat; nec vereor dicere, quod hujus defectu doctrina iſta ſemper difficultatibus, iiſque graviſſimis, fuerit obnoxia.

344. Et quidem vera notio proportionis hæc eſt, ut tunc quidem dicendæ ſint proportionales quatuor quantitates, quotieſcumque antecedentes reſpectu ſuorum conſequentium eadem lege progrediuntur. Hinc autem efficitur, ut non aliud ſtatui poſſit generale criterium proportionalitatis, quam ut dicamus, proportionales eſſe quatuor quantitates, quotieſcumque, quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut conſequentem ſuum adæquet, id omne fieri debet ab alio antecedente, ut conſequenti ſuo æqualis quoque oriatur. Quod ſane criterium nulla eget ulteriore demonſtratione, quum ex ipſa proportionis idea ſponte ſua conſequatur.

345. Hujus itaque criterii ope, diſcimus primo, quatuor quantitates 2, 6, —4, —12 proportionales eſſe; quia, ſicuti antecedens 2 ſumi debet ter in ſtatu ſuo, quo conſequentem 6, ad quem refertur, adæquet; ita antecedens alter —4 ſumendus eſt etiam ter in ſuo ſtatu, quo poſſit ſuum ſimiliter conſequentem —12 adæquare. Diſcimus ſecundo, proportionales eſſe etiam, tam quantitates 2, —6, 4, —12,

 quam

quam quantitates — 2, 6, — 4, 12; quia in utraque analogia, ſicuti antecedens unus ſumi debet ter in ſtatu contrario, ut conſequentem ſuum adæquet, ita antecedens alter ter quoque ſumendus eſt in ſtatu contrario, quo ſuum etiam conſequentem adæquet. Atque, ob eandem rationem, diſcimus demum proportionales eſſe, tam quantitates 2, — 6, — 4, 12, quam quantitates — 2, 6, 4, — 12; quandoquidem in utraque proportione ambo antecedentes ſumi debent ter in ſtatu contrario, quo ſuos poſſint conſequentes adæquare.

346. Diſcimus, inquam, uno verbo illius criterii ope, quod ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates; earum proportio non perturbatur, ſi duæ quævis capiantur unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus oppoſiti. Sed, ejuſdem criterii ope, diſcimus, proportionem quatuor quantitatum perturbari, ſi ex iis tres quidem capiantur unius ſtatus, & reliqua ſtatus contrarii. Neque enim ſubſiſtit hæc analogia, ut 2 ad 6, ita 4 ad — 12; nec item hæc alia, ut — 2 ad — 6, ita — 4 ad 12. Nam in utraque antecedens unus ſumi debet ter in ſtatu ſuo, quo ſuum conſequentem adæquet; quum tamen antecedens alter ſumendus ſit ter in ſtatu contrario, quo ſuum ſimiliter conſequentem poſſit adæquare.

V. Impoſſibilitas quantitatum imaginariarum ex proprio fonte deducta.

art. 346. 347. POſtquam nobis innotuerit*, proportionem non ſubſiſtere inter quatuor

tuor quantitates, quarum tres ſint unius ſtatus, & reliqua ſtatus oppoſiti; haud difficulter oſtendemus veritatem ejus, de quo paulo ante * locuti ſumus, & unde impoſſibilitas pendet quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ: nimirum, quod inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam poſſit quidem par numerus mediarum proportionalium inveniri; ſed non item numerus impar. *Art. 342.

348. Nam, quotieſcumque inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam duæ mediæ proportionales proponuntur inveniendæ; poterit illarum una eſſe negativa, & altera poſitiva: ac propterea inter quantitates diverſi ſtatus proportio conſiſtere. Verumtamen, quum inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam una tantum media proportionalis proponitur invenienda, ea impoſſibilis erit; quandoquidem, ſive capiatur poſitiva, ſive negativa, ſemper ex quatuor terminis analogiæ tres erunt unius ſtatus, & quarta ſtatus contrarii: nec proinde inter eos ulla poterit eſſe proportio.

349. Ut ſi velim, exempli cauſa, inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 16 invenire duas medias proportionales, earum una erit — 4, altera 8. Nam, ſicuti prima, ut conficiat ſecundam, ſumi debet bis in ſtatu contrario; ita, ut ſecunda conficiat tertiam, & tertia conficiat quartam, ſumendæ ſunt pariter bis in ſtatu oppoſito ei, in quo jam reperiuntur. Sed, ſi inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 8 quæratur una tantum media proportionalis; ea exhiberi non poteſt. Nam in quocumque ſtatu capiatur, non poterit

adæ-

adæquare tertiam per id ipſum, per quod ei prima quantitas redditur æqualis.

350. Eadem omnino ratione oſtendemus pariter, inter quantitatem poſitivam, & quantitatem negativam poſſe quidem quatuor, ſex, aut octo medias proportionales inveniri; ſed non item tres, quinque, aut ſeptem. Atq; hac ratione jam ex proprio ſuo fonte impoſſibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, deducta mihi videtur. Nam, ſicuti oriuntur * hujuſmodi quantitates, quum extrahendæ ſunt radices ordinis paris ex quantitatibus negativis; ita pro extractione harum radicum* impar numerus mediarum proportionalium inter unitatem, & propoſitam qnantitatem debet reperiri.

* art. 316.

* art. 337.

351. Interim nolo hic reticere, impoſſibilitatem quantitatum imaginariarum in eo tantum conſiſtere, quod quantitates illæ, nec poſſunt eſſe poſitivæ, nec negativæ. Sed non hinc eas omnino fictitias dixerim; quia dari poteſt tertius quidam ſtatus, qui ſit medius inter poſitivum, & negativum, & in quo quantitates illæ ſint reponendæ. Et ſpeciatim in Geometria non vereor aſſerere, quod, ſicuti quantitates poſitivæ, & negativæ explicantur per lineas, tendentes ad plagas oppoſitas; ſic & quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, explicari poſſunt per lineas, quæ ad plagas intermedias tendant.

352. Id vel exinde liquere poteſt, quod hujuſmodi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, ſuas habent proprietates, non ſecus ac eæ, quas reales appellamus. Poſſunt ſiquidem inter ſe mutuo comparari, earumque rationes determinari, perinde ac ſi eſſent quantitates veræ,

ac

ac reales . Et quamquam imaginariæ cum realibus conferri non poſſint, id tamen abſolutam earum impoſſibilitatem minime arguere debet; quia poſitivæ cum negativis non aliter etiam conferuntur, quam faciendo, ut analogiæ duo quidem termini ſint poſitivi, & alii duo plane negativi: quod pariter in imaginariis locum habere poteſt.

353. Hinc obiter notetur hic velim, quod, quum proportio inter quantitates diverſi ſtatus inſtituitur, ſemper duo termini debent eſſe unius ſtatus, & alii duo ſtatus alterius; nec ſubſiſtet unquam proportio inter eas quantitates, quarum tres ſunt unius ſtatus, & quarta ſtatus diverſi. Itaque, ſicuti, quum omnes quantitates, inter quas proportio inſtituitur, ſunt reales, earum duæ debeant eſſe poſitivæ, & duæ negativæ; ita, quum proportio inſtituenda eſt inter quantitates, partim reales, & partim imaginarias, debent ex iis duæ eſſe reales, & aliæ duæ imaginariæ.

354. Diſtinctio autem quantitatum in poſitivas, & negativas obtinet etiam, quum ipſæ quantitates ſunt imaginariæ; quandoquidem imaginaria quantitas, quæ oritur, extrahendo ex -2 quadratam radicem, eſſe poteſt, tam $+\sqrt{-2}$, quam $-\sqrt{-2}$. Sed non hinc putandum eſt, quod ubi proportio inſtituitur inter duas quantitates reales, duaſque alias imaginarias, & ex realibus una ſumitur poſitiva, & altera negativa; ſimiliter ex imaginariis una debet eſſe poſitiva, & altera negativa. Nam generaliter in hujuſmodi proportionibus, quæ inſtituuntur inter quantitates reales, & imagi-

na-

nariis, tres termini debent eſſe unius ſigni, & quartus ſigni contrarii.

355. Cæterum, unde fiat, ut radix numeri paris quantitatis poſitivæ, poſſit eſſe, tum poſitiva, cum negativa; facile ex dictis colligi poteſt. Ubi enim, exempli gratia, extrahenda eſt quadrata radix ex numero 9, non aliud fieri debet, quam invenire mediam proportionalem inter unitatem, & ipſum numerum 9. Profecto autem media iſta proportionalis eſſe poteſt, tam + 3, quam — 3. Nam in utroque caſu quidquid efficit prima, ut ſecundam adæquet, illud idem pariter fieri debet a ſecunda, ut adæquet tertiam. Quare quadrata radix numeri 9 ſimiliter eſſe poterit, tam + 3, quam — 3, hoc eſt, tam poſitiva, quam negativa.

356. Sunt qui putant, proportionem nullimode inſtitui poſſe, inter quantitates diverſi ſtatus; nec verùm eſſe, quod 2 ſit ad — 4, ut — 5 ad 10. Nam, inquiunt, oſtenſum eſt ab Euclide in Elementis, quod ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima, & ſecunda ſint, vel una majores, vel una minores, vel una æquales relate ad tertiam, & quartam: quod tamen in allata analogia nequaquam obtinet: eſt enim 2 major, quam — 5; & tamen — 4 eſt minor, quam 10. Sed reſpondetur, conſiderari ab Euclide in ea propoſitione exceſſum, defectum, vel æqualitatem, quæ oritur ex propria cujuſque termini quantitate: & profecto verum eſt dicere, quod ſicuti ratione quantitatis — 4 minor eſt, quam 10; ſic pariter 2 minor ſit, quam — 5.

VI.

VI. *Quantitatum imaginariarum in ordines diſtributio.*

357. UT natura quantitatum imaginariarum diſtinctior evadat, illud reliquum eſt, ut differentiam, quæ inter eas exiſtit, oſtendamus. Et quidem, quum dicantur generaliter* quantitates imaginariæ radices numeri paris, ex quantitatibus nagativis extrahendæ; tale nomen meretur, non modo $\sqrt{-a}$, verum etiam $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$, $\sqrt[8]{-a}$, atque ita deinceps. Interim non omnes hujuſmodi quantitates imaginariæ ſunt ejuſdem indolis;ſed diſtinguendæ ſunt eæ in varios ordines, ſecundum eos ſignorum radicalium indices, qui per nullum numerum imparem dividi poſſunt: adeo, ut dicendæ ſint primi ordinis, ubi index ſigni radicalis eſt 2; ſecundi ordinis, quum idem index eſt 4; tertii ordinis, quum ille index eſt 8; quarti ordinis, quum habent 16 pro indice ſui ſigni radicalis; atque ita in infinitum. *Art. 316.

358. Quo ratio hujus diviſionis rectius intelligatur, notandum eſt primo, quod ubi index ſigni radicalis per aliquem numerum imparem dividi poteſt, quantitas imaginaria ſit ſemper ejuſdem naturæ cum illa, quæ habet pro indice ſui ſigni quotientem ejus diviſionis. Ita, quia par numerus 6, diviſus per numerum imparem 3, dat parem 2 in quotiente; quantitas imaginaria, quæ habet pro ſui ſigni indice numerum 6, erit ejuſdem indolis cum illa, cujus ſignum notatur numero 2. Atque ita quoque, quia par numerus 12, diviſus per numerum impa-

pa-

parem 3, dat parem 4 in quotiente; quantitas imaginaria, cujus ſignum notatur numero 12, ejuſdem naturæ cenſenda eſt cum ea, cujus ſignum notatur numero 4.

359. Neque vero difficile id erit oſtendere. Nam $\sqrt[6]{-a}$ tantundem valet, ac radix quadrata ipſius $\sqrt[3]{-a}$. Sed $\sqrt[3]{-a}$ nihil continet
*Art. 313. imaginarii, quum idem ſit *, ac $-\sqrt[3]{a}$. Itaque, ſi $-\sqrt[3]{a}$ ponatur æqualis $-b$; erit $\sqrt[6]{-a}$ idem omnino, ac $\sqrt{-b}$. Eadem ratione $\sqrt[12]{-a}$ perinde valet, ac radix quarta ipſius $\sqrt[3]{-a}$, ſive $-\sqrt[3]{a}$. Quare, ponendo rurſus, quod $-\sqrt[3]{a}$ ſit æqualis $-b$; erit $\sqrt[12]{-a}$ idem prorſus, ac $\sqrt[4]{-b}$. Atque ita quoque $\sqrt[20]{-a}$ tantundem ſignificat, ac radix quarta ipſius $\sqrt[5]{-a}$, ſive etiam $-\sqrt[5]{a}$. Unde, ſi ponamus, quod $-\sqrt[5]{a}$ ſit æqualis $-b$; erit $\sqrt[20]{-a}$ idem plane, ac $\sqrt[4]{-b}$.

360. Iſtiuſmodi autem reductio minime fieri poteſt in iis quantitatibus imaginariis, quarum ſigna notantur numeris, qui per nullum numerum imparem dividi poſſunt. Non enim inficior, $\sqrt[4]{-a}$ tantundem valere, ac radix quadrata ipſius $\sqrt{-a}$. Sed $\sqrt{-a}$, quum ſit quantitas imaginaria, ſupponi nequit æqualis $-b$. Unde procul eſt, ut $\sqrt[4]{-a}$ reduci poſſit ad $\sqrt{-b}$. Atque ita pariter, non in dubium verto, quin $\sqrt[8]{-a}$ perinde valeat, ac radix quadrata ipſius $\sqrt[4]{-a}$. Verum $\sqrt[4]{-a}$ eſt quantitas imaginaria; nec ideo ſupponi poteſt æqualis $-b$. Quare $\sqrt[8]{-a}$ revocari nequit ad $\sqrt{-b}$.

361. Patet ergo, diverſos ordines quantitatum imaginariarum conſtituendos eſſe ſecun-

dum

dum eos ſignorum radicalium indices, qui per nullum numerum imparem dividi poſſunt. Ut autem eorum ordinum differentiæ cognitæ fiant, notetur primo velim, indices ſuorum ſignorum conſtituere progreſſionem geometricam, quæ incipiens a numero binario, continuo in ratione dupla augetur. Hinc enim liquido conſtat, quod ſicuti quantitas imaginaria primi ordinis eſt quadrata radix quantitatis negativæ, ita quantitas imaginaria cujuſcumque alterius ordinis ſit radix quadrata alterius quantitatis imaginariæ, quæ ad ordinem præcedentem refertur.

362. Jam, quum agitur de extrahenda radice quadrata ex aliqua quantitate, vidimus ſuperius *, non aliud fieri debere, quam reperire mediam proportionalem inter unitatem, & ipſam quantitatem. Unde licebit etiam aſſerere, quod ſicuti quantitas imaginaria primi ordinis eſt media proportionalis inter unitatem, & quantitatem negativam; ita quantitas imaginaria alterius cujuſcumque ordinis ſit media proportionalis inter unitatem, & quantitatem aliam imaginariam, quæ pertinet ad ordinem præcedentem. Ex quibus jam ſatis, opinor, ſit perſpecta, ac explorata differentia, quæ inter varios ordines quantitatum imaginariarum exiſtit.

*art. 338.

CAPUT V.

Calculus quantitatum imaginariarum.

363. ETſi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, ſaltem in ſtatu realium

lium poſitivo, ac negativo vere, ac realiter non exiſtant; in reſolutione tamen problematum ſæpe ſæpius eæ nobis occurrunt, nec raro contingit, ut eæ etiam ad calculum poni debeant. Quocirca, ne aliquid omittamus, quod ad quantitatum calculum pertinere videtur; illud nunc oſtendemus, qua ratione quantitatum imaginariarum calculus perfici poſſit.

364. Jam quantitates imaginariæ, quæ frequentius occurrunt, eæ ſunt, quæ ad primum ordinem referuntur. Unde, ne longiores ſimus, quam Elementorum ratio patitur, de iſtarum tantum calculo agemus. Sed in eo tradendo non multum morabimur. Nam, quum hujuſmodi quantitates, perinde ac omnes aliæ imaginariæ, exprimantur ad inſtar radicalium; perficietur calculus ipſarum iiſdem fere regulis, quibus radicalium quantitatum calculus abſolvitur.

365. Itaque quantitates imaginariæ, ad inſtar quantitatum radicalium, ſuos poſſunt habere coefficientes; qui tamen reponuntur intra ſignum, ſi evecti ad quadratum, multiplicentur per quantitates, ſub ſigno exiſtentes. Qua ratione $3\sqrt{-2}$ idem erit, ac $\sqrt{-18}$; & $2\sqrt{-5}$ idem, ac $\sqrt{-20}$. Sed viciſſim, ſi in quantitate, ſub ſigno exiſtente, reperiatur diviſor aliquis, unde extrahi poſſit radix quadrata; per extractionem hujus radicis, poterit diviſor ille extra ſignum collocari. Ita $\sqrt{-18}$ tantundem valet, ac $3\sqrt{-2}$; & $\sqrt{-20}$ perinde ſignificat, ac $2\sqrt{-5}$.

366. Jam, collocando extra ſignum maximum diviſorem quantitatis, ſub ſigno exiſtentis, ex quo extrahi poteſt quadrata radix, re-

du-

ducetur quantitas imaginaria ad ſimpliciorem ſuam expreſſionem. Ita maximus diviſor quantitatis -72, ex quo extrahi poteſt quadrata radix, eſt 36. Quare, collocando extra ſignum iſtiuſmodi diviſorem, fiet $6\sqrt{-2}$ ſimplicior expreſſio quantitatis imaginariæ $\sqrt{-72}$. Atque ita quoque quantitas imaginaria $\sqrt{-300}$, ubi ad ſimpliciores ſuos terminos reducitur, evadet $10\sqrt{-3}$.

I. *Additio, & ſubtractio quantitatum imaginariarum.*

367. Quantitates imaginariæ adduntur in unum, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, quotieſcumque reductæ methodo, jam * tradita, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere reperiuntur. Sic ſumma ex duabus quantitatibus imaginariis $\sqrt{-8}$, & $\sqrt{-18}$ eſt $\sqrt{-50}$. Nam, reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos, fiunt $2\sqrt{-2}$, & $3\sqrt{-2}$; adeoque ſimul conjunctæ ſummam exhibent $5\sqrt{-2}$, quæ tantundem valet *, ac $\sqrt{-50}$. Et ſimiliter, quia quantitates imaginariæ $\sqrt{-9}$, & $\sqrt{-16}$, ubi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducuntur, fiunt $3\sqrt{-1}$, & $4\sqrt{-1}$; erit ſumma ipſarum $7\sqrt{-1}$, ſive etiam $\sqrt{-49}$.

*Art. 366.

*Art. 365.

368. Quod ſi quantitates imaginariæ, reductæ methodo, jam * tradita, ad ſimpliciores ſuos terminos, non reperiantur habere ſub ſigno eandem quantitatem; tunc fiet additio, conjungendo eas ſigno $+$. Qua ratione ſumma ex quantitatibus imaginariis $\sqrt{-12}$, & $\sqrt{-18}$ erit

*Art. 366.

$\surd -12 + \surd -18$. Nam, ſi reducantur ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, evadunt $2\surd -3$, & $3\surd -2$; atque adeo ſub ſigno radicali non eandem, ſed diverſas continent quantitates.

369. Similiter quantitates imaginariæ ſubtrahuntur a ſe mutuo, ſubducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, quotieſcum-
* art. 366. que reductæ methodo * tradita ad ſimpliciores ſuos terminos, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere reperiuntur. Sic reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $\surd -8$ ex $\surd -50$, eſt $\surd -18$. Nam, eæ quantitates imaginariæ, reductæ ad expreſſiones ſuas ſimpliciores, fiunt $2\surd -2$, & $5\surd -2$; adeoque prior ex ſecunda ſubducta dabit pro reſiduo $3\surd -2$, quod
* art. 365. tantundem valet *, ac $\surd -18$. Et ſimiliter, quia quantitates imaginariæ $\surd -49$, & $\surd -9$, ubi ad ſimpliciores ſuos terminos reducuntur, fiunt $7\surd -1$, & $3\surd -1$; ſubducendo ſecundam ex prima, orietur reſiduum $4\surd -1$, ſive etiam $\surd -16$.

370. Quod ſi quantitates imaginariæ, redu-
* art. 366. ctæ methodo * tradita ad ſimpliciores ſuos terminos non reperiantur habere ſub ſigno eandem quantitatem; tunc fiet ſubtractio, conjungendo eas ſigno $-$. Qua ratione id, quod relinquitur, ſubducendo $\surd -20$ ex $\surd -50$, erit $\surd -50 - \surd -20$. Nam, ſi reducantur quantitates illæ imaginariæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones evadunt $2\surd -5$, & $5\surd -2$; atque adeo ſub ſigno radicali non eandem, ſed diverſas continent quantitates.

371. Abſque ulla reductione poſſunt etiam quantitates imaginariæ ſimul addi, vel a ſe mutuo

tuo ſubtrahi, dividendo per ſe invicem quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes. Nam, ſi contingat ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut extrahi exinde poſſit radix quadrata; ſatis erit, eruere radicem iſtam, eandemque unitate auctam, vel diminutam adſcribere, velut coefficientem, quantitati imaginariæ minori.

372. Proponantur, exempli gratia, ſimul addendæ quantitates duæ imaginariæ $\sqrt{-75}$, & $\sqrt{-3}$. Jam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt -75, & -3. Quare, diviſa majore -75 per minorem -3, fiet quotiens 25. Et quoniam ex quotiente iſto 25, velut quadrato perfecto, erui poteſt quadrata radix, quæ eſt 5; augeatur hæc radix unitate, ita ut fiat 6. Et ſumma propoſitarum quantitatum erit $6\sqrt{-3}$, ſive etiam $\sqrt{-108}$.

373. Oporteat etiam, ex quantitate imaginaria $\sqrt{-98}$ ſubducere quantitatem aliam imaginariam $\sqrt{-2}$. Quoniam quantitates, ſub ſignis exiſtentes, ſunt -98, & -2; dividatur major -98 per minorem -2. Quumque pro quotiente habeatur numerus 49, qui eſt quadratum perfectum; eliciatur exinde quadrata radix 7. Et quia radix iſta, unitate diminuta, eſt 6; erit $6\sqrt{-2}$, ſive etiam $\sqrt{-72}$ reſiduum propoſitæ ſubtractionis.

374. Cæterum, ſi additio, & ſubtractio fieri debeant inter quantitatem imaginariam, & quantitatem realem, ſive commenſurabilem, ſive radicalem; omnino neceſſe eſt, ſignis $+$, & $-$ eas indicare. Qua ratione erit $5+\sqrt{-2}$ ſumma duarum quantitatum 5, & $\sqrt{-2}$; & $\sqrt{10}+\sqrt{-5}$ id, quod oritur, addendo $\sqrt{-5}$ cum

$\sqrt{10}$. Pariterque erit $15 - \sqrt{-12}$ id, quod remanet, ſubducendo $\sqrt{-12}$ ex 15; & $\sqrt{-30} - \sqrt{7}$ id, quod ſupereſt, ſubtrahendo realem $\sqrt{7}$ ex imaginaria $\sqrt{-30}$.

II. Multiplicatio, & diviſio quantitatum imaginariarum.

375. Quantitates imaginariæ multiplicari poſſunt per ſe mutuo, abſque ulla ipſarum ad ſimpliciores ſuos terminos reductione; quum ſatis ſit, multiplicare per ſe invicem, tam coefficientes, ſi quos habent, quam quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $2\sqrt{-3}$ per $5\sqrt{-2}$ erit $10\sqrt{6}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{-5}$ per $6\sqrt{-10}$, erit $18\sqrt{50}$. Atque ita quoque erit $12\sqrt{42}$ id, quod gignitur, multiplicando $3\sqrt{-7}$ per $4\sqrt{-6}$.

376. Ex quo patet, productum ex duabus quibuſvis quantitatibus imaginariis eſſe quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Interim realis quantitas, quæ producitur, ſumenda eſt ſemper negativa: adeo, ut ſi multiplicari debeat $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$, quemadmodum productum eſt $\sqrt{36}$; ita pro radice quadrata numeri 36 ſumere oportet -6, & non $+6$. Quod vel exinde liquere poteſt, quod perinde eſt, multiplicare $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-2}$, ac quadratum efficere ex $\sqrt{-2}$: & profecto, ſicuti $\sqrt{-2}$ eſt quadrata radix quantitatis negativæ -2; ita quadratum ex $\sqrt{-2}$ debet eſſe ipſa quantitas negativa -2.

Ex eo autem, quod productum ex
er $\sqrt{-18}$ ſit -6, & non $+6$, liquet
us, quod ſuperius * innuimus: nimi- *art. 354.
iod quum in aliqua proportione duo
ùnt reales, & duo alii ſunt imaginarii,
es eſſe unius ſigni, & reliquus ſigni
. Nam quum in omni multiplicatione,
ad multiplicatorem, ut quantitas mul-
ı ad productum; erit quidem, ut 1 ad
ta $\sqrt{-18}$ ad -6. Et perſpicuum eſt,
portione tres priores terminos eſſe af-
no $+$, poſtremum vero affici ſigno $-$.

Sed ex eo, quod productum ex $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$ ſit -6, ſequitur viciſſim debere eſſe $+6$ id, quod producitur, multiplicando, vel $\sqrt{-2}$ per $-\sqrt{-18}$, vel $-\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$. Nam ratione ſignorum, quibus quantitates, ad invicem multiplicandæ, afficiuntur, productum eſſe debet $-\sqrt{36}$. Unde ſemper ac pro quadrata radice numeri 36 ſumere oportet -6; erit $-\sqrt{36}$ ipſa quantitas -6, in ſtatu negativo poſita: proindeque erit $+6$. Quumque ratione multiplicationis eſſe debeat, ut 1 ad $\sqrt{-2}$, ita $-\sqrt{-18}$ ad 6; vel etiam, ut 1 ad $-\sqrt{-2}$, ita $\sqrt{-18}$ ad 6: liquet rurſus, in utraque analogia tres terminos affici ſigno $+$, & reliquum ſigno $-$ affectum reperiri.

279. Ut ergo productum ex duabus quantitatibus imaginariis eſt ſemper quantitas realis; ita realis hæc quantitas erit negativa, quum quantitates imaginariæ iiſdem ſignis afficiuntur, & viciſſim poſitiva, quum contrariis ſignis ſunt affectæ. Interim, ſi multiplicanda ſit quantitas imaginaria per quantitatem aliam realem, pro-

ductum erit ſemper quantitas alia imaginaria: quæ tamen afficienda erit ſigno +, aut −, prout ipſæ quantitates, quæ multiplicantur ad invicem, contrariis, aut iiſdem ſignis afficiuntur. Ita id, quod producitur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{5}$, erit $-\sqrt{-15}$. Et ſimiliter id, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per -2, erit $2\sqrt{-3}$ ſive $\sqrt{-12}$.

380. Quod autem ex multiplicatione quantitatis realis per aliam imaginariam, productum oriri debeat affectum ſigno +, aut −, prout ipſæ quantitates, quæ multiplicantur inter ſe, contrariis, aut iiſdem ſignis afficiuntur; id exinde dependet, quod ubi in aliqua proportione duo termini ſunt reales, & alii duo imaginarii, debent eſſe * tres unius ſigni, & reliquus ſigni contrarii. Nam, ex natura multiplicationis, quotieſcumque multiplicare oportet $\sqrt{5}$ per $\sqrt{-3}$, debet eſſe, ut 1 ad $\sqrt{5}$, ita $\sqrt{-3}$ ad productum. Quare omnino neceſſe eſt, ut produm ejus multiplicationis ſigno − affectum oriatur.

* art. 354.

381. Diviſio quoque quantitatum imaginariarum peragi poterit, abſque ulla ipſarum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione; quum ſatis ſit, per ſe mutuo dividere, tam coefficientes, ſi quos habent, quam quantitates, ſub ſignis exiſtentes. Qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo $6\sqrt{-12}$ per $2\sqrt{-2}$ erit $3\sqrt{6}$. Pariterque quotiens, qui producitur, dividendo $20\sqrt{-5}$ per $4\sqrt{-3}$ erit $5\sqrt{(5:3)}$. Atque ita quoque, ſi dividere oporteat $7\sqrt{-10}$ per $\sqrt{-2}$, ſive $1\sqrt{-2}$, quotiens fiet $7\sqrt{5}$.

382. Ex quo patet, quotientem, qui oritur,

tur ex diviſione duarum quantitatum imaginariarum, eſſe quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Verum hic quoque notandum eſt, quod realis illa quantitas, quæ habetur pro quotiente, ſumenda eſt ſemper negativa: adeo, ut ſi dividi debeat $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$, quemadmodum quotiens eſt $\sqrt{9}$; ita pro radice quadrata numeri 9, ſumere oportet -3, & non $+3$: quo ſit, ut ratione diviſionis 1 ſit ad -3, ut eſt $\sqrt{-2}$ ad $\sqrt{-18}$.

383. Ex eo autem, quod ſit -3 quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$; ſequitur debere eſſe $+3$ quotientem, qui oritur, dividendo, ſive $\sqrt{-18}$ per $-\sqrt{-2}$, ſive $-\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$. Unde generaliter, ſicuti quotiens, qui oritur ex diviſione duarum quantitatum imaginariarum eſt ſemper quantitas realis; ita realis hæc quantitas erit negativa, quum quantitates imaginariæ, ad dividendum propoſitæ, iiſdem ſignis afficiuntur; & viciſſim poſitiva, quum contrariis ſignis ſunt affectæ.

384. Cæterum, ſi dividenda ſit, vel quantitas imaginaria per quantitatem aliam realem, vel quantitas realis per quantitatem aliam imaginariam; quotiens erit quantitas imaginaria, affecta ſigno $+$, aut $-$, prout quantitates, ad dividendum propoſitæ, contrariis, aut iiſdem ſignis afficiuntur. Ita quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{-12}$ per $\sqrt{2}$, erit $-\sqrt{-6}$. Atque ita quoque, ſi dividere oporteat 4 per $-\sqrt{-2}$, hoc eſt $\sqrt{16}$ per $-\sqrt{-2}$; quotiens fiet $+\sqrt{-8}$.

III. Formatio poteſtatum, & extractio radicum ex quantitatibus imaginariis.

385. UT quantitates imaginariæ ad datam quamcumque poteſtatem eleventur, neque etiam neceſſe eſt, ad ſimpliciores ſuos terminos eas revocare; quum ſufficiat, ad poteſtatem illam attollere, tam coefficientes, ſi quos habent, quam quantitates, ſub ſignis exiſtentes. Qua ratione quantitatis imaginariæ $2\sqrt{-3}$ quadratum erit $4\sqrt{9}$, cubus $8\sqrt{-27}$, quadrato-quadratum $16\sqrt{81}$, quadrato-cubus $32\sqrt{-243}$, atque ita deinceps. Pariterque alterius hujus quantitatis imaginariæ $3\sqrt{-2}$ ſecunda poteſtas erit $9\sqrt{4}$, tertia poteſtas $27\sqrt{-8}$, quarta poteſtas $81\sqrt{16}$, quinta poteſtas $243\sqrt{-32}$, atque ita de aliis.

386. Unde patet, quantitatum imaginariarum, de quibus hic agimus, poteſtates omnes ordinis imparis eſſe quantitates alias ſimiliter imaginarias; omnes vero poteſtates ordinis paris eſſe quantitates veras, ac reales. Sed reales quantitates, quas nobis ſuppetunt poteſtates pares quantitatum imaginariarum, nec item omnes ſunt ejuſdem ſpeciei. Oriuntur ſiquidem negativæ, quum ſemiſſes exponentium ipſarum poteſtatum ſunt numeri impares; & per contrarium prodeunt poſitivæ, quum iidem ſemiſſes ſunt numeri pares.

387. Neque vero difficile id erit oſtendere. Quum enim $\sqrt{-3}$ ſit quadrata radix quantitatis negativæ -3; utique debet eſſe -3 quadratum ex $\sqrt{-3}$. Jam vero omnes aliæ poteſta-

ſtates ordinis paris ejuſdem quantitatis imaginariæ $\sqrt{-2}$, relate ad ejus quadratum -2, merentur * nomen ſecundæ, tertiæ, quartæ, &c. Quare, quum hujuſmodi poteſtates ipſius -3 ſint 9, -27, 81, &c.; tales etiam erunt omnes aliæ poteſtates ordinis paris quantitatis imaginariæ $\sqrt{-3}$; & propterea erunt negativæ, ubi ſemiſſes ſuorum exponentium ſunt numeri impares; & viciſſim poſitivæ, ubi iidem exponentium ſemiſſes ſunt numeri pares. *art. 79.

388. Quantum ad extractionem radicum ex quantitatibus imaginariis, nec item ulla opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione; quin præſtat, ad eam commode peragendam, ipſos, ſi quos habent, coefficientes regula, ſuperius * tradita, ſub radicali ſigno reponere. Extrahetur ergo quæcumque radix ex quantitate aliqua imaginaria; vel eam eliciendo ex quantitate, ſub ſigno exiſtente; vel, ſi id fieri nequit, multiplicando indicem ſigni radicalis per indicem quæſitæ radicis. *art. 365.

389. Ita radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{-8}$ erit $\sqrt{-2}$; ſed radix quadrata ejuſdem imaginariæ quantitatis erit $\sqrt[4]{-8}$. Similiter radix quinta quantitatis imaginariæ $\sqrt{-243}$ erit $\sqrt{-3}$; ſed radix quarta ejuſdem quantitatis imaginariæ erit $\sqrt[8]{-243}$. Unde patet, cujuſcumque imaginariæ quantitatis radices omnes eſſe ſimiliter quantitates imaginarias, nec ex illa extrahi poſſe radicem ullam, quæ quantitatem realem, ſive poſitivam, ſive negativam nobis exhibeat.

390. Sed notandum hoc loco eſt, quod, etſi radices omnes cujuslibet quantitatis imaginariæ

ſint

ſint aliæ quantitates ſimiliter imaginariæ ; attamen extat inter eas hujuſmodi diſcrimen , quod eæ , quarum indices ſunt numeri impares , ſunt imaginariæ primi ordinis , perinde ac eſt ipſa quantitas , unde eædem extrahuntur ; illæ vero, quarum indices ſunt numeri pares , ſunt quantitates imaginariæ ordinum ſuperiorum.

391. Nec obſcura eſt hujus rei ratio. Nam, ſi quęlibet radix extrahatur, multiplicando indicem ſigni radicalis per indicem quæſitæ radicis ; afficietur quæſita radix tali ſigno radicali, ut index ejus erit ipſe radicis index duplicatus. Unde per
*art.357. ea, quæ ſuperius * dicta ſunt de imaginariarum in ordines diſtinctione , omnino neceſſe eſt , ut ſint imaginariæ primi ordinis radices illæ , quarum indices ſunt numeri impares ; & viciſſim ordinum ſuperiorum , quarum indices ſunt numeri pares .

392. Atque hac occaſione obiter notetur hic velim , regulas calculi imaginariarum primi ordinis non omnino habere locum in imaginariis ordinum ſuperiorum . Jam enim vidimus paulo
*art.386. ante * , quod, ubi quantitas imaginaria eſt primi ordinis, ſint ſimiliter imaginariæ, omnes poteſtates , quarum indices ſunt numeri impares ; & viciſſim reales, ſingulæ poteſtates , quarum indices ſunt numeri pares . Sed non perinde res eſt, quum agitur de imaginariis ordinum ſuperiorum .

393. Nam, ſi exempli gratia, quantitas imaginaria ſit ſecundi ordinis ; erunt pariter imaginariæ , non modo omnes poteſtates , quarum indices ſunt numeri impares , verum etiam eæ poteſtates , quarum indices dimidiati ſunt numeri

im-

impares. Quantitatis quippe negativæ -2 radix quarta tantundem valet, ac radix quadrata ipſius $\sqrt{-2}$. Unde omnino neceſſe eſt, ut quadratum ipſius $\sqrt[4]{-2}$ ſit $\sqrt{-2}$.

394. Sed ſemper ac quadratum, ſeu ſecunda poteſtas ipſius $\sqrt[4]{-2}$ eſt $\sqrt{-2}$, neceſſe eſt pariter, ut ſit $\sqrt{-8}$ ſexta ejus poteſtas, $\sqrt{-32}$ poteſtas decima, atque ita de aliis. Nam iſtiuſmodi poteſtates, quarum exponentes dimidiati ſunt numeri impares, relate ad quadratum, eædem cum iis cenſendæ * ſunt, quæ ipſos nume- * *art. 79.*
ros impares pro ſuis exponentibus habent.

395. Quum ergo quantitas imaginaria eſt ſecundi ordinis, eæ tantum ipſius poteſtates ſunt quantitates reales, quarum exponentes dimidiati ſunt numeri pares. Atque iſtæ nec etiam ejuſdem indolis omnes deprehenduntur. Nam erunt negativæ, quum quadrantes eorundem exponentium ſunt numeri impares; erunt vero poſitivæ, quum iidem quadrantes ſunt numeri pares.

396. Nulli enim dubium eſſe poteſt, quin quarta poteſtas quantitatis imaginariæ $\sqrt[4]{-2}$ ſit -2. Unde prono alveo fluit, debere eſſe 4 octavam ejus poteſtatem, -8 poteſtatem duodecimam, 16 poteſtatem decimamſextam, atque ita deinceps: Nam hujuſmodi poteſtates, relate ad quartam, merentur * nomen ſecundæ, tertiæ, * *art. 79.*
quartæ, &c.; adeoque habentur, ſumendo ipſius -2 quadratum, cubum, quadrato-quadratum, &c.

IV. *Geneſis, & calculus imaginariarum compoſitarum.*

397. Diſtinctio quantitatum in ſimplices, & compoſitas habet etiam locum in quantitatibus imaginariis. Si enim contingat, ut imaginariæ quantitates adhæreant aliis, ſive realibus, ſive imaginariis, ope ſignorum $+$, & $-$; tunc eæ dicentur compoſitæ. Unde perſpicuum eſt, quantitates imaginarias compoſitas oriri ſimiliter ex ſimplicium additione, & ſubtractione.

398. Qua autem ratione fieri debeat calculus imaginariarum compoſitarum, haud difficile erit ex dictis eruere. Sint enim primo addendæ duæ imaginariæ compoſitæ $3-\sqrt{-50}$, & $5+\sqrt{-18}$. Jam ſumma ipſarum eſſe debet $3-\sqrt{-50}+5+\sqrt{-18}$. Verum, quia $3+5$ idem eſt, ac 8; & $-\sqrt{-50}+\sqrt{-18}$ perinde valet, ac $-\sqrt{-8}$; erit eadem ſumma paulo ſimplicius $8-\sqrt{-8}$. Atque ita quoque ſi $\sqrt{12}+\sqrt{-32}$ addi debeat cum $\sqrt{27}-\sqrt{-50}$, ſumma erit $\sqrt{75}-\sqrt{-2}$.

399. Oporteat ſecundo, ſubducere imaginariam compoſitam $5+\sqrt{-18}$ ex $8-\sqrt{-8}$, quæ eſt quantitas alia imaginaria ſimiliter compoſita. Jam reſiduum, quod inde oritur, eſſe debet $8-\sqrt{-8}-5-\sqrt{-18}$. Eſt autem $8-5$ idem, ac 3; eſtque etiam $-\sqrt{-8}-\sqrt{-18}$ idem, ac $-\sqrt{-50}$. Quare idem reſiduum erit paulo ſimplicius $3-\sqrt{-50}$. Atque ita quoque id, quod remanet, ſubducendo $\sqrt{12}+\sqrt{-32}$ ex $\sqrt{75}-\sqrt{-2}$, erit $\sqrt{27}-\sqrt{-50}$.

400. Multiplicandæ ſint tertio per ſe invicem imaginariæ duæ compoſitæ $3 + \surd - 12$, & $4 - \surd - 2$. Fiant quatuor multiplicationes: nimirum primo multiplicetur 3 per 4, deinde $+ \surd - 12$ per 4, poſtea 3 per $- \surd - 3$, & denique $+ \surd - 12$ per $- \surd - 3$. Jamque, additis in unum productis omnibus, quæ ex quatuor hiſce multiplicationibus oriuntur, fiet $12 - 4\surd - 12 + 3\surd - 3 + 6$, ſive etiam $18 - 5\surd - 3$ productum quæſitum.

401. Dividenda ſit quarto imaginaria compoſita $18 - 3\surd - 2$ per $1 + \surd - 2$, quæ eſt alia quantitas imaginaria ſimiliter compoſita. Capiatur ipſius $1 + \surd - 2$ quantitas contraria $1 - \surd - 2$; & per eam multiplicetur, tam $18 - 3\surd - 2$, quam $1 + \surd - 2$. Dividatur porro primum productum $12 + 21\surd - 2$ per ſecundum productum 3; & fiet $4 - 7\surd - 2$ quotiens propoſitæ diviſionis.

402. Elevanda ſit quinto ad quadratum quantitas imaginaria compoſita $5 - \surd - 3$. Fiat primo quadratum ex 5; tum capiatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando 5 per $- \surd - 3$; denique fiat quadratum ex $- \surd - 3$. Et, additis ſimul omnibus hiſce quantitatibus, erit $25 + 10\surd - 3 - 3$, hoc eſt $22 + 10\surd - 3$ quadratum quæſitum.

403. Denique extrahenda ſit quadrata radix ex quantitate imaginaria compoſita $22 + 10\surd - 3$. Quoniam quadratum ex 22 eſt 484, & quadratum ex $10\surd - 3$ eſt $- 300$; erit differentia horum quadratorum 784, cujus quadrata radix eſt 28. Addatur ergo 28 cum 22, & erit 25 ſummæ ſemiſſis. Subtrahatur deinde 28 ex

22,

22, & erit — 3 ſemiſſis reſidui. Quumque radices quadratæ horum ſemiſſium ſint 5, & $\surd$ — 3, erit 5 — $\surd$ — 3 radix optata.

404. Neque verò mirum cenſeri debet, quod radices eorum ſemiſſium ſigno — connectuntur.

*art. 379. 380. Jam enim vidimus ſupra *, quod ubi quantitas realis per alteram imaginariam multiplicatur, productum affici debet ſigno +, aut —, prout ipſæ quantitates, ad invicem multiplicandæ, contrariis, aut iiſdem ſignis afficiuntur: Unde, quia id, quod producitur ex multiplicatione radicum eorum ſemiſſium, oriri debet affectum ſigno +; omnino neceſſe eſt, ut connectantur ſigno — ipſæ eorum ſemiſſium radices.

405. Cæterum, ſi ex aliqua quantitate imaginaria compoſita radix extrahi nequit; tunc poterit ea deſignari, adhibito ſigno alio radicali, quod ad quantitatem totam ſe extendat. Atque hac ratione patet, dari, non modo imaginarias compoſitas, verum etiam imaginarias univerſales. Sed de iſtarum calculo nihil hoc loco ſubnectemus; tum quia tantum non impoſſibile eſt, ut ad calculum poni debeant; tum etiam, quia ex iis, quæ hactenus dicta ſunt, facile erit, intelligere, quo pacto fieri debeat calculus ipſarum.

V. Impoſſibilitas relativa quantitatum imaginariarum plenius vindicata.

406. EX calculo mox tradito quantitatum imaginariarum, quæ ad primum ordinem referuntur, perſpicuum eſt, eas non aliter quantitatibus realibus opponi, quam reales negativæ realibus poſitivis adverſantur.

Nam

Nam primo, quemadmodum, multiplicando, aut dividendo quantitatem poſitivam per quantitatem negativam, producitur quantitas alia ſimiliter negativa; ita, multiplicando, aut dividendo quantitatem realem per quantitatem imaginariam, producitur quantitas alia ſimiliter imaginaria. Et ſecundo, ſicuti productum, vel quotiens, qui oritur ex duabus quantitatibus negativis, per ſe mutuo multiplicatis, vel diviſis, eſt quantitas poſitiva; ita id, quod producitur ex multiplicatione, aut diviſione duarum quantitatum imaginariarum, eſt quantitas, non quidem imaginaria, ſed realis.

407. Verum quidem eſt, poſtremum iſtud non ab omnibus omnino Algebriſtis admitti; quum non deſint, qui in ſuis Algebræ Elementis doceant, quantitates duas imaginarias, per ſe mutuo multiplicatas, vel diviſas quantitatem aliam imaginariam producere. Sed eos in maximo errore verſari, oſtendi poteſt; tum quia ex ipſa geneſi quantitatum imaginariarum notum eſt, productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, eſſe quantitatem realem -3; tum etiam, quia in confeſſo eſt apud omnes, idem eſſe ex producto, vel quotiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quam ipſas eorum quadratorum radices per ſe mutuo multiplicare, vel dividere.

408. Jam, quum quantitates imaginariæ, ſaltem quæ primi ordinis ſunt, perinde realibus opponantur, ac reales negativæ realibus poſitivis; illud exinde vero ſimillimum fit, quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, non eſſe abſolute impoſſibiles, ſed tantum, quia in ſtatu rea-

lium

lium poſitivarum, vel negativarum concipi non poſſunt. Oppoſitio namque, quæ eſt inter poſitivas, & negativas, nihil obſtat, quominus negativæ ſint perinde reales, ac poſitivæ. Itaque eadem ratione, tametſi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, opponantur iis, quæ vulgo dicuntur reales: non hinc tamen colligi poteſt, eas abſolute impoſſibiles eſſe; ſed tantum inferre licet, quod ſicuti quantitates negativæ ſunt impoſſibiles in ſtatu poſitivarum, ita quantitates imaginariæ impoſſibilitatem involvant in utroque eorum ſtatuum, in quibus reales quantitates conſiderantur.

409. Atque hinc vero ſimillimum etiam redditur id, quod jam ſuperius * innuimus: nimirum, quod in Geometria, ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas, tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas, tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ, ſaltem quæ primi ordinis ſunt, deſignari debent per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam linea, quæ plagas iſtas oſtendit, ſecat ad rectos angulos lineam, oſtendentem plagas duas priores: ex quo fit, ut unæ aliis opponantur ex diametro. Quocirca lineæ, tendentes ad plagas illas intermedias, deſignare debent quantitates contrarias iis, quas deſignant lineæ, tendentes ad plagas principales: proindeque, quum iſtæ lineæ deſignent quantitates, quæ vulgo dicuntur reales; eæ non alias poterunt deſignare, quam ipſas illas, quæ ad primum ordinem imaginariarum referuntur.

* Art. 351.

410. Huc accedit & altera ratio, quæ forſan demonſtrationis vices geret apud eos, qui probe

be norint, quam bene Algebra cum Geometria conſentiat: nimirum, quod, ſicuti quantitatum, quæ vulgo dicuntur reales, aliæ ſunt poſitivæ, aliæ negativæ; ita quantitates, quæ vocantur imaginariæ, eſſe poſſunt, non modo poſitivæ, verum etiam negativæ. Sic radix quadrata quantitatis negativæ —2, ut ſuperius * etiam dictum *art. 354.
eſt, deſignari poteſt, tam per $+\surd -2$, quam per $-\surd -2$; quia, juxta regulas ſignorum, utriuſque quadratum eſt -2. Itaque, quia plagæ illæ intermediæ opponuntur etiam inter ſe; exhiberi ſane poterunt per lineas, tendentes ad unam illarum, quantitates imaginariæ poſitivæ; & per lineas, tendentes ad plagam alteram, quantitates imaginariæ negativæ.

411. Quæ quidem ſi ita vera ſint, quemadmodum maximam veriſimilitudinis ſpeciem præſeferre videntur, illud ex iis colligi jure optimo poteſt, inter quantitates, qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri; quum omnes ſint nihilo majores, omnes æque reales, ac veræ: ſed omnem oppoſitionem oriri ex eo, quod quædam concipi debeant in ſtatu uno, & aliæ in ſtatu contrario; indeque ortas eſſe eas quantitatum diſtinctiones, quod aliæ ſunt poſitivæ, ſeu nihilo majores, aliæ negativæ, ſeu nihilo minores; quodque etiam quædam ſunt reales, ſeu vere, ac realiter exiſtentes, quædam imaginariæ, hoc eſt, quæ tantum finguntur, ac imaginantur.

412. Hunc autem diverſum ſtatum nihil obſtare, quominus poſitivæ cum negativis, reales cum imaginariis comparentur; non eſt, quod in dubium poſſit revocari. Nam, etſi quantitates, quæ comparantur inter ſe, Euclide ipſo docen-

te, debeant eſſe unius, ejuſdemque generis; tales tamen cenſendæ ſunt, non quidem ratione ſtatus, in quo conſiderantur, ſed ratione ejus, per quod quantitatis nomen merentur: adeo, ut nec linea cum ſuperficie, nec ſuperficies cum corpore poſſit comparari, quia ſcilicet diverſa ratione quantitates appellantur. Unde, quum quantitates negativæ, propter ſolam negationem, non ſint diverſi generis a poſitivis; falluntur ii, qui falli eos arbitrantur, penes quos 1 eſt ad — 1, ut — 1 ad 1.

413. Interim, etſi ſola diverſitas ſtatus non efficiat, ut quantitates dici debeant diverſi generis; non hinc tamen negamus, diverſum illum ſtatum etiam attendendum eſſe, quo quatuor quantitates dici poſſint proportionales. Vera etenim proportionis idea, ut ſuperius * vidimus, hæc eſt, ut tunc quidem dicendæ ſint proportionales quatuor quantitates, quotieſcumque, quidquid efficitur a prima, ut ſecundam adæquet, illud idem fieri debet a tertia, ut adæquet quartam. Unde quatuor quantitates, non ſolum tales eſſe debent, ut prima perinde contineat ſecundam, ac tertia continet quartam; verum etiam, ut ſtatus primæ ad ſtatum ſecundæ perinde ſe habeat, ac ſtatus tertiæ ad ſtatum quartæ.

* art. 79.

SE-

SECTIO III.

De Calculo Serierum Infinitarum.

414. DUabus præcedentibus ſectionibus, ea de calculo litterali, ſeu ſpecioſo a nobis tradita ſunt, quæ vulgo Algebriſtæ in ſuis Algebræ Elementis de eo tradere conſueverunt. Sed, præter illa, pertinent ad eundem calculum quamplura alia, quibus longe ultra in hac ſcientia progredi licet. Unde, ne aliquid circa calculum omittamus, quod ad majorem Algebræ perfectionem deinceps conferre queat; non gravabimur, paulo uberiorem reddere priorem hunc librum noſtrorum Algebræ Elementorum.

415. Quæ autem circa calculum ulterius a nobis in hoc libro tradenda ſunt, ut ſub initium * pariter innuimus, ad duo ſumma capita reducuntur: nimirum ad ſeries infinitas, & ad generalem poteſtatum theoriam. Quare duabus præcedentibus ſectionibus duas alias ſubnectemus; ac in iſta quidem agemus de calculo ſerierum infinitarum; tum ſectione ſequenti theoriam poteſtatum ad ſuam univerſalitatem revocare conabimur. * art. 3.

416. Jam doctrina ſerierum infinitarum inintelligi rite non poteſt, niſi cognita prius diſtinctione quantitatum in indefinite magnas, & parvas; & intellectis item variis ordinibus, qui ex utriuſque generis quantitatibus fieri debent Unde, priuſquam ſerierum infinitarum calculum

agg[illegible]amur, oſtendemus breviter, unde nam oriatur diſtinctio quantitatum in indefinite magnas, & parvas; quave item fiat ratione, ut tam illæ, quam iſtæ in varios ordines dividi debeant.

CAPUT I.

Diſtinctio quantitatum in indefinite magnas, & parvas.

417. UT rectius intelligatur, tam diſtinctio quantitatum in indefinite magnas, & parvas, quam earundem in certos ordines diſtributio; rem, oportet, paulo altius repetamus, & quæ ſit vera notio quantitatis, paucis prius explicemus. Etſi enim quantitas ſit totius Matheſeos objectum, & id omne, de quo ediſſerunt Mathematici, ad quantitatem pertineat; aſſerere tamen non vereor, nihil tam abditum eſſe, etiam apud vulgus Mathematicorum, quam id, quod nomine quantitatis intelligi debet.

I. Notio quantitatis, & per quid diſcreta differat a continua.

418. VUlgo quantum appellatur id omne, quod ex partibus præexiſtentibus conſtat. Et, juxta hanc quantitatis notionem, duæ ejus ſpecies paſſim diſtinguuntur, continua, & diſcreta. Vocatur enim quantitas continua, cujus partes ſunt ſimul copulatæ. Vocatur vero quantitas diſcreta, cujus partes

tes viciſſim ſunt a ſe mutuo ſejunctæ. Unde differentia inter quantitatem continuam, & quantitatem diſcretam a partium unione, & ſeparatione communiter deducitur.

419. Sed, hoc tantum inter utramque quantitatis ſpeciem diſcrimine poſito, non ſatis intelligi poteſt, cur continua ſit ſemper, & omnifariam diviſibilis; viciſſim vero diſcreta determinatas quaſdam diviſiones dumtaxat admittat. Itaque, qui ſupra vulgus ſapiunt, differentiam inter continuum, & diſcretum, non modo ex unione, ac ſeparatione partium; verum etiam ex earum numero, ſeu multitudine repetendam eſſe arbitrantur.

420. Sic igitur ſtatuunt, ut habenda ſit velut quantitas continua, cujus partes non modo ſimul cohærent, verum etiam numero infinitæ deprehenduntur; & per contrarium, ut cenſenda ſit quantitas diſcreta, quæ partes habet, & numero finitas, & a ſe mutuo ſejunctas. Sed hujuſmodi ſyſtema nec etiam omni vacat difficultate. Sic enim oporteret, duas alias quantitatis ſpecies admittere; unam, cujus partes cohærent inter ſe, & ſunt numero finitæ; alteram, quæ ex partibus conſtat, & numero infinitis, & a ſe mutuo ſejunctis.

421. Ne igitur aliæ duæ iſtæ quantitatis ſpecies eſſent admittendæ, illud oporteret oſtendere, quod cohæſio partium, quam continui natura requirit, omnino exigit, ut partes illæ ſint numero infinitæ; & viciſſim, ut partium diſtractio, quam diſcreti notio involvit, ſubſiſtere nequeat, niſi eædem partes finitæ numero ſtatuantur. Verum, quum id nec ab ullo adhuc

ſit oſtenſum, nec ab aliquo unquam oſtendetur; omnino neceſſe eſt, ut longe aliter de quantitate ſentiamus.

422. Et quidem, ſi nihil ſolliciti de quantitate diſcreta, in continuam ſtatim inquirimus; facile erit, naturam iſtius perfecte aſſequi. Quum enim in quantitate continua nullas partes, realiter a ſe mutuo diſtinctas, intueamur; nihil certe ad credendum nos inducet, adeſſe in ea aliquem numerum partium, ex quibus eadem coaleſcit. Quare poterit illa conſiderari, non quidem ut complexus, ſeu aggregatum partium præexiſtentium; ſed tantummodo velut totum, natura ſua diviſibile.

423. Licebit ergo, vocare quantitatem continuam, non quæ ex partibus componitur, ſed quæ natura ſua diviſibilis eſt, & per diviſionem fit partium capax. Nec ideo putandum eſt, aliquas dari continuæ quantitatis partes præexiſtentes; ſed eæ in ipſa ſubnaſcuntur, ubi experitur eam diviſionem, quam natura ſua ſuſcipere poteſt. Plane vero, quum in partes ſciſſa eſt, & conſideratur velut compoſita ex partibus illis; tunc ſortitur naturam aliam, & diſcreta quantitas eſt appellanda.

424. Hinc quantitas continua præcedit diſcretam; & peſſime ſe gerunt, qui nulla continui habita ratione, ſtatim ad diſcretum animum volvunt. Extat autem inter continuum, & diſcretum iſtud diſcrimen, quod continuum eſt unum natura ſua, fitque multiplex per diviſionem, cujus eſt capax; viciſſim vero diſcretum natura quidem eſt multiplex, fitque unum, colligendo ſimul diſcerptas illas partes, ex quibus compoſitum cenſetur.

425.

425. Verum,ut differentia,quæ inter utramque quantitatis ſpeciem intercedit, plenius innoteſcat, præſtat, diviſionis ejus, cujus continua quantitas eſt capax, paulo intimius naturam, ac indolem perſcrutari. Nimirum duabus ea conditionibus eſt prædita. Primo enim peragi poteſt ſemper, nec ullibi limitem agnoſcit. Deinde vero, non determinata aliqua ratione, ſed omnifariam fieri poteſt.

426. Jam quantitas diſcreta, quum ex partibus ſit compoſita, in partes quoque dividi poteſt. Verum, quum non in alias partes ſit diviſibilis, quam in eas, ex quibus jam componitur; utique ejus diviſio non gaudet iis proprietatibus, quibus continuæ quantitatis diviſibilitas pollet. Neque enim quantitatem diſcretam continuo dividere licet; nec ejus diviſio ſubinde fieri poteſt, ut quæcumque optata pars ex ea detrahi queat.

427. Ita,ſi habeatur quantitas aliqua diſcreta, ex decem tantum partibus compoſita; ejus diviſio eouſque progreditur, donec decem illæ partes rurſus fuerint a ſe mutuo ſejunctæ. Et ex eadem diſcreta quantitate poterit quidem dimidia, quinta, aut decima pars detrahi; ſed tertiam, quartam, ſextam, aut aliam quamvis partem nequaquam ex ea ſubducere licebit; quum hujuſmodi diviſiones compoſitioni ejus omnino adverſentur.

428. Neque dicas,ex quolibet numero poſſe per fractiones quamlibet partem detrahi. Nam reſpondetur, tunc numerum naturam aſſumere quantitatis continuæ; indeque fieri, ut omnifariam partitionem ejus inſtituere liceat.

Quod quidem mirum eſſe non debet. Nam, ut
*art.318. diximus ſuperius * , quilibet numerus poteſt quamcumque quantitatem nobis deſignare; adeoque, repræſentando nobis eam quantitatem, fit capax omnium diviſionum, quas quantitas illa ſuſcipere poteſt.

429. Quod quum ita ſit, en quoque diſcrimen aliud, quod inter quantitatem continuam, & quantitatem diſcretam intercedit: nimirum, quod illa dividi poteſt in infinitum, & quamcumque optatam partem ex ea detrahere licet; viciſſim vero iſta dumtaxat reſolvi poteſt in eas partes, ex quibus jam componitur, nec aliam partem ex ea ſubducere fas eſt, quam quæ compoſitioni ejus non adverſatur.

II. Geneſis quantitatis, ejuſque augendæ, vel minuendæ ratio.

430. QUæ hactenus de quantitate diſputavimus, huc fere redeunt; quod quæ primo ſub contemplationem cadere debet, eſt quantitas continua; quod hujus nullæ dantur partes præexiſtentes, ſed conſideranda eſt velut quid, natura ſua diviſibile; quod ejus diviſibilitas nullibi limitem agnoſcit, nec determinata aliqua ratione, ſed omnifariam fieri poteſt; quodque demum eadem quantitas continua evadit diſcreta, atque adeo alterius indolis, ubi patitur eam diviſionem, cujus capax eſt natura ſua.

431. Ut autem ulterius viam nobis aperiamus ad id, quod erat præcipuum, inquirendum eſt modo in geneſim ipſius quantitatis, & in id ani-

ni-

nitendum, ut quo pacto oriatur quantitas, quave item ratione augeatur, aut minuatur, intelligi poſſit. Et quidem, quantum ad geneſim diſcretæ quantitatis, nullam ea patitur difficultatem. Oritur enim ex actuali diviſione quantitatis continuæ; adeoque augetur per appoſitionem aliarum partium, & minuitur per ſubductionem earum, ex quibus jam conſtat.

432. Sed non perinde res eſt de quantitate continua. Hæc, etſi in partes ſit diviſibilis; ex partibus tamen præexiſtentibus non componitur. Unde multum abeſt, ut oriatur per appoſitionem partium; & procul eſt etiam, ut ejus incrementum, aut decrementum partium additioni, aut detractioni ferri poſſit acceptum. Unde ergo repetenda ſit geneſis quantitatis continuæ, & qua ratione ſuſcipiat eadem ſuum incremenaum, aut decrementum; neceſſe eſt, hic paucis aperire.

433. Sane, pro explicanda geneſi quantitatis continuæ, variæ hypotheſes a Mathematicis ſunt excogitatæ; ſed nulla aptior, magiſque ejus naturæ conſona meo judicio deprehenditur, quam quæ a motu rem repetit: nimirum in eo, de quo agitur, quantitatis genere concipiendum eſt primo ſignum aliquod prorſus indiviſibile; tum per continuum hujus ſigni fluxum, ſeu motum quæſitam quantitatem oriri, putandum eſt.

434. Ad hunc modum Veteres Geometræ tradiderunt geneſim quantitatum, quæ in Geometria conſiderantur. Jam enim notum eſt, tria eſſe harum quantitatum genera; lineam, quæ unicam tantum dimenſionem habet; ſuperficiem, cui duæ inſunt dimenſiones; & ſolidum,

quod

quod tribus dimenſionibus conſtat. Profectò autem lineam per motum puncti, ſuperficiem per motum lineæ, & ſolidum per motum ſuperficiei oriri docuerunt.

435. Nec dubium eſſe poteſt, quin pro geneſi cujuſque harum quantitatum ſignum aſſumpſerint prorſus indiviſibile. Ut enim punctum, velut omnis expers dimenſionis, eſt quid indiviſibile, tam relate ad lineam, quam ex ipſa ejus natura; ita linea, velut expers latitudinis, haberi debet, velut quid indiviſibile, relate ad ſuperficiem; pariterque ſuperficies, quum careat profunditate, ut quid indiviſibile, relate ad ſolidum, debet exiſtimari.

436. Non diſſimiliter iidem Veteres Geometræ tradiderunt geneſim figurarum ſpecialium. Oriri namq; docuerunt, parallelogrammum ex latione unius rectæ ſuper rectam aliam immobilem; circulum ex rotatione radii circa unum ejus extremum fixum, & immobile; ſphæram ex revolutione ſemicirculi circa ſuam diametrum fixam, & quieſcentem; cylindrum ex uniformi latione rectæ per circumferentias immobiles duorum circulorum æqualium, & ſibi invicem æquidiſtantium; atque ita de aliis.

437. Hac autem ratione, non modo quantitates geometricæ, ſed & quævis aliæ poſſunt oriri. Tempus enim, exempli gratia, velut fluxus ſigni illius indiviſibilis, quod inſtans dicitur, poteſt haberi. Verum circa tempus illud peculiari quadam ratione obtinet, quod non aliter oriri concipiendum eſt, quam per fluxum inſtantis æquabilem, ac uniformem, hoc eſt, qui neque acceleretur, neque retardetur. Nam profectò

tem-

tempus labitur æquabiliter, nec ejus labendi ratio unquam intenditur, aut remittitur.

438. Loquimur vero de tempore abſoluto, & non relativo; hoc eſt de duratione, & perſeverantia rerum exiſtentium, & non de motu ſolis, quo vulgo tempus metimur. Neque enim nos latet, motum ſolis non eſſe æquabilem, ac uniformem, & inæquales eſſe dies naturales, qui vulgo tamquam æquales habentur. Sed neque etiam nos fugit, motum illum non eſſe accuratam temporis menſuram, & corrigere Aſtronomos eam inæqualitatem, ut verum tempus poſſint habere.

439. Et ſane æquum erat, ut tempus laberetur conſtanter, ac uniformiter. Tempore enim metimur alios aliorum ſignorum fluxus, ſeu motus; putamuſque hos celeriores, aut tardiores, prout quantitates, æqualibus temporibus genitæ, ſunt majores, vel minores. Unde omnino neceſſe erat, ut tempus flueret æquabiliter, ac uniformiter. Nam aliter, nec de æqualitate partium ejus certi quidpiam ſtatui, nec ipſi aliorum ſignorum motus inter ſe mutuo comparari potuiſſent.

440. Ut ergo ad propoſitum redeamus, non aliter oriri cenſenda eſt quantitas continua, quam per fluxum ſigni alicujus indiviſibilis, ad eam producendam apti. Id vero ſignum, non velut pars genitæ quantitatis debet haberi, ſed ſimpliciter tamquam terminus ejus: eadem ferme ratione, ac punctum habetur, velut terminus lineæ; linea, velut terminus ſuperficiei; & ſuperficies, velut terminus corporis.

441. Hinc generatur quantitas continua, non

non repetita ejus ſigni appoſitione, ſed excurſu illius per locum, ut ita dicam, quo quantitas continetur. Jam enim omnia locantur; in tempore quidem, quoad ordinem ſucceſſionis; in ſpatio vero, quoad ordinem ſitus. Sed, tum tempus, & ſpatium, cum omnes alias quantitates, ſua quoque loca habere, putandum eſt: quæ ſaltem in modo concipiendi ab ipſis quantitatibus differunt.

442. Cæterum, ſicuti oritur quantitas continua per fluxum ſigni alicujus indiviſibilis, ad eam producendam apti; ita eadem augetur, ſuumque ſubit augmentum, ubi idem ſignum fluere pergit. Minuitur vero, & decrementum patitur quantitas continua, quotieſcumque ſignum illud, fluxu contrario, redit ad principium, unde fluere cœperat. Atque hac ratione perſpicuum eſt, quantitatem eo uſque minui poſſe, ut evadat, vel plane nulla, vel etiam negativa.

443. Quod ſi contingat, ut quantitas aliqua maneat eadem, &. invariata, interea ac aliæ augentur, ac minuuntur; tum deſtitiſſe fluere ſignum ſuum, oportet cogitemus. Unde obiter notetur, hic velim, quod ſicuti relate ad tempus fluxus inſtantis, nec nullus evadere poteſt, nec item variari; ita, relate ad aliam quamvis quantitatem, fluxus ſigni ſui eſſe poteſt, & nullus, & conſtans, & variabilis: nimirum nullus, quum quantitas eadem, ac immutata manet; conſtans, quum augetur, vel minuitur in eadem ratione cum ipſo tempore; ac denique variabilis, quum ejus incrementum, aut decrementum fit in alia quavis ratione.

III. *Quantitatum indefinite parvarum ortus, & natura.*

444. Oſtenſa geneſi quantitatum, & explicata ratione, qua augentur, ac minuuntur; videamus modo, unde fiat, ut eædem diſtingui debeant in indefinite magnas, & parvas. Et quidem, quum oriatur quantitas quævis, per fluxum ſigni ejus indiviſibilis, quod aptum eſt ad eam producendam; facile erit intelligere, quod in geneſi cujuſque quantitatis conſiderari debet velocitas, qua ſignum illud fluit indeſinenter.

445. Jam iſta velocitas quantitatibus indefinite parvis locum præbet. Ea enim eſt, ut quantitas, dato quovis tempore genita, quum eadem ſemper manet, nec unquam mutatur; eſt vero in prima augmenti jam naſcentis ratione, quum variabilis eſt, & continuo patitur mutationem. Nam, ut ut mutationi velocitas illa ſit obnoxia; haberi tamen poteſt velut conſtans, ac uniformis, ubi augmentum illud incipit oriri.

446. Hinc, ſicuti ad augmenta jam jam naſcentia oportet confugere, quotieſcumque ſignorum, quibus quantitates generantur, variabiles velocitates debent definiri; ita augmenta illa velut quantitates indefinite parvæ debent haberi. Et quoniam indefinita iſta parvitas intelligenda eſt, relate ad quantitates, quæ ſubeunt eadem illa augmenta; hinc eſt, ut viciſſim quantitates iſtæ, relate ad ea, velut indefinite magnæ debeant exiſtimari.

447. Concipiamus ergo, fluere ſignum aliquod,

quod, & fluxu ſuo, tum quantitatem generare, cum eandem perpetuo augere. Jam augmentum naſcens, relate ad quantitatem jam genitam, quantitas indefinite parva nominatur. Per contrarium vero quantitas jam genita, relate ad naſcens illud augmentum, quantitas indefinite magna vocitatur. Adhibentur vero vocabula iſta; quia, quum illiuſmodi augmentum in prima ſui origine conſideretur, idem reſpectu quantitatis, cui accedit, eſt indefinitæ plane parvitatis, & in computu ejus omnino negligi poteſt.

448. Etſi autem naſcentia iſta quantitatum augmenta ſint indefinitæ parvitatis, relate ad quantitates, quibus accedunt, neque adeo eas ſenſibiliter adaugeant; poſſunt tamen inter ſe mutuo comparari, & per quantitates finitas eorum rationes exhiberi. Quod ut uno, aut altero exemplo hic oſtendamus, notabimus primo, arcum jam jam naſcentem cujuslibet curvæ poſſe velut exiguam rectam conſiderari, coincidentem cum recta illa, quæ curvam in eo loco contingit.

FIG. 3. 449. Eſto enim recta quævis AB, eique alia ad datum angulum applicetur AC. Exeat punctum aliquod ex loco A, quod interea ac movetur velocitate ut ut variabili ſuper AC, feratur recta iſta AC motu parallelo, & ſi placet æquabili ſuper AB. Jam punctum illud, ſubiens quoque motum rectæ AC, deſcribet in plano rectarum AB, AC lineam curvam AMX. Sit ergo M*m* arcus aliquis naſcens curvæ hujus. Dico, arcum iſtum M*m* conſiderari poſſe velut exiguam rectam, coincidentem cum recta MT, quæ curvam tangit in M.

450.

450. Ducantur namque ad puncta M, & *m* rectæ NM, *nm*, ipſi AC parallelæ. Jamque, ubi naſcitur arcus M*m*, erit N*n* augmentum ipſius AN. Et, ſi ducatur MO, ipſi AB parallela, erit quoq; O*m* augmentum ipſius NM. Iſta porro augmenta immutatis fere velocitatibus producuntur. Quare, ducta inter ipſas N*m*, *nm* recta alia *tr*, eidem AC parallela; erit * ut N*n* ad N*t*, ita O*m* ad *sr*. Sed N*n* eſt ad N*t*, ut MO ad M*s*. Quare erit ex æquali, ut MO ad M*s*, ita O*m* ad *sr*: & propterea punctum *r* locabitur in eadem recta cum punctis M, & *m*. * *art*. 445.

451. Simili ratione oſtendetur, quodvis aliud punctum ejuſdem arcus M*m* in eadem recta locari. Quare ipſe arcus M*m* velut exigua recta debet haberi. Quod vero recta iſta coincidat cum tangente MT; id ex notione tangentis profluit. Conſiderando etenim lineas, velut ortas ex motu punctorum, non aliud erit diſcriminis inter tangentem, & ſecantem, quam quod in loco occurſus punctum deſcribens rectam, & punctum deſcribens curvam feruntur eadem directione, quum recta eſt tangens; & directionibus diverſis, quum recta eſt ſecans. Unde omnino neceſſe, ut tangens MT intercipiat longitudine ſua arcum M*m*; quippe qui velut jam naſcens immutata, tum velocitate, cum directione deſcribitur.

452. Hoc prænotato, maximum in doctrina curvarum uſum habente, jam primum rei, de qua agitur, exemplum ſuppeditat nobis idem ſchema, quod præ manibus habemus; quum facile ſit oſtendere, augmenta naſcentia rectarum AN, NM, & arcus AM eſſe inter ſe, ut latera

trian-

trianguli TNM, Ponatur enim, quod arcus M*m* ſit naſcens augmentum ipſius AM. Jamque,
*art.450. iiſdem ut ſupra * manentibus, erunt MO, O*m* naſcentia augmenta ipſarum AN, NM. Sed triangulum MO*m* in forma ſua naſcente eſt æquiangulum triangulo TNM; quum arcus M*m*
*art.448. ſit exigua recta * coincidens cum tangente MT. Quare, tria illa naſcentia augmenta M*m*, MO, O*m* proportionalia erunt tribus rectis finitis MT, NT, NM.

453. Deinde, ut aliud ejuſdem rei exem-
FIG. 4. plum afferamus, revolvatur recta CM circa polum C, & hac ejus revolutione ſecet interea rectam aliam poſitione datam AB. Demittatur ſuper AB perpendicularis CD. Et naſcentia augmenta ipſarum AM, CM erunt, ut rectæ CM, DM. Eſto enim M*m* naſcens augmentum ipſius AM. Jamque, ſi juncta C*m*, deſcribatur centro C, intervalloque CM arcus MO, erit O*m* naſcens augmentum alterius CM. Quia autem
*art.448. arcus MO ab ejus tangente * non differt, triangulum MO*m* in forma ſua naſcente erit æquiangulum triangulo CD*m*. Unde erit, ut M*m* ad O*m*, ita C*m* ad D*m*. Sed C*m*, D*m* non dif-
*art.447. ferunt * ſenſibiliter ab ipſis CM, DM. Quare erit quoque, ut M*m* ad O*m*, ita CM ad DM.

454. Denique ultimum rei, de qua agitur, exemplum ſubſiſtet nobis ſpecies, a præcedente non diſſimilis. Nimirum recta CM revolutio-
FIG. 5. ne ſua circa polum C ſecet non unam, ſed rectas duas poſitione datas AB, AE. Et naſcentia augmenta ipſarum AM, AN erunt in ratione compoſita ex AM ad AN, & ex CM ad CN. Si enim M*m* ſit naſcens augmentum ipſius AM;

jun-

junćta Cm, fiet Nn augmentum naſcens alterius AN. Et quoniam, dućta MO, ipſi AE parallala; fiunt æquiangula, tam duo triangula MOm, Anm, quam triangula duo CMo, CNn; erit, ut Mm ad MO, ita Am ad An, ſive ita AM ad AN; & ut MO ad Nn, ita CM ad CN. Sed Mm eſt ad Nn in ratione compoſita ex Mm ad MO, & ex MO ad Nn. Quare Mm ad Nn habebit quoque rationem compoſitam ex AM ad AN, & ex CM ad CN.

455. Nec reticebimus hoc loco, quod eadem determinatio pariter obtinet, ſi rećta revolvens CM, loco rećtarum, ſecet in punćtis M, & N duas quaſvis curvas poſitione datas, & in locis interſećtionum M, & N tangant curvas iſtas rećtæ duæ AB, AE, ſibi invicem occurrentes in A. Nam augmentum naſcens curvæ, quam tangit rećta AB, ad augmentum naſcens curvæ, quam tangit rećta AE, adhuc erit in ratione compoſita ex AM ad AN, & ex CM ad CN; quum naſcentia augmenta earum curvarum * coincidant cum rećtis AB, AE. Sed idem etiam eveniet, ſi rećta CM, non quidem revolvatur circa polum immobilem C, ſed curvam aliquam poſitione datam perpetuo tangat alicubi in C. FIG. 6. *art. 448.

IV. *Quantitatum indefinite parvarum in ordines diſtinćtio.*

456. Vidimus *, diſtinćtioni quantitatum in indefinite magnas, & parvas præbere locum velocitates ſignorum, quibus quantitates ipſæ generantur. Nam, ſicuti *art. 445

adeo proportione correſpondere ei, quod accedit incremento primo velocitatis. Unde, quum
art.446. illud ſit indefinitæ parvitatis relate ad ipſum, cui accedit, velocitatis incrementum; erit ea differentiarum differentia pariter indefinite parva relate ad differentiam priorem: & propterea, ſicut
*art.459. hæc eſt * indefinities indefinite parva reſpectu genitæ quantitatis, ſpectatque adeo ad ſecundum genus quantitatum indefinite parvarum; ita illa relate ad eandem quantitatem erit parvitatis adeo indefinitæ, ut ad tertium genus quantitatum indefinite parvarum debeat referri.

463. Oriuntur ergo quantitates indefinite parvæ tertii generis in hypotheſi, quod augetur indeſinenter, tam velocitas primitiva ſigni, per cujus fluxum quantitas generatur, quam incrementum quodque naſcens ejus velocitatis. Unde ſedulo notandum hoc loco eſt, quod ſi augeatur dumtaxat velocitas primitiva ſigni, & incrementa ejus naſcentia maneant ſemper eadem; nullæ erunt quantitates indefinite parvæ tertii generis. Eodem autem argumento oſtendemus, oriri quantitates indefinite parvas quarti generis in hypotheſi, quod augetur, & velocitas primitiva ſigni, & ejus incrementum naſcens, & id, quod huic rurſus accedit. Atque hac ratione perſpicuum eſt, in infinitum progredi licere.

464. Cæterum eadem quantitatum indefinite parvarum genera ſubnaſcuntur, ſi ponamus velocitatem ſigni, fluxu ſuo quantitatem producentis, non quidem augeri, ſed minui. Nam,
*art.445. ſicuti ex primitiva illa velocitate oriuntur * quantitates indefinite parvæ primi generis; ita de-

decremento, quod eadem velocitas primo loco patitur, ferenda eſt accepta geneſis quantitatum indefinite parvarum, quæ ſecundi ſunt generis; ex ea, quam ratione prioris decrementi rurſus ſubit, diminutione ſuam trahunt originem quantitates indefinite parvæ tertii generis; atque ita deinceps. Quorum quidem demonſtrationes ſunt prorſus eædem; & ſuperfluum puto, eas denuo repetere.

465. Juvat interim, in ſummam contrahere, nec non paulo intimius rationem hic perpendere, qua hujuſmodi quantitates indefinite parvæ oriri concipiuntur. Nimirum jam quantitas generari, & augeri intelligitur per fluxum ſigni, ad eam producendam apti. Sed iſte fluxus, ut tempore perficitur, ſic etiam velocitate quadam debet abſolvi. Rurſus autem, & tempus, & velocitas per fluxus ſuorum ſignorum generantur. Verum fluxus temporis eſt * ſemper conſtans, ac uniformis; non ita vero fluxus velocitatis, ut qui, & nullus, & conſtans, & variabilis eſſe * poteſt.

*art. 437.

*art. 443.

466. Incrementa ergo naſcentia temporis conſiderari debent velut æqualia. In lapſu autem eorum temporis incrementorum, ſi velocitas ſigni, quantitatem producentis, nullum patiatur fluxum; erunt genitæ quantitatis naſcentia augmenta perpetuo pariter æqualia; adeoque in geneſi ejus tantum quantitates indefinite parvas primi generis conſiderare licebit. Quod ſi vero velocitas illa fluxum ſubeat conſtantem, ac uniformem; inæqualia quidem erunt naſcentia augmenta quantitatis genitæ, ſed eorum differentiæ primæ fient æquales: quo fit, ut in ejus

quantitatis productione uſq; ad quantitates indefinite parvas ſecundi generis progredi fas ſit.

467. Supereſt tertius caſus, nimirum, quum velocitas ſigni, quantitatem producentis, fluxu gaudet variabili. Et quum id contingit, inæqualitas etiam ad differentiarum differentias, imo pro lege variationis longe ultra ſe extendet: proindeque in geneſi hujus quantitatis alia quoque genera quantitatum indefinite parvarum locum habebunt. Hæc autem quum ita ſint, abunde, opinor, liquet, varia quantitatum indefinite parvarum genera, non jam ex fluxu temporis, qui eſt ſemper conſtans, & uniformis; ſed ex fluxu velocitatis, qui eſſe poteſt, & nullus, & conſtans, & variabilis, repeti debere.

468. Sed notandum hoc loco eſt, quod quum plures quantitates ſimul producuntur, fieri poteſt, ut non eodem modo fluant velocitates, quibus eæ generantur. Neque enim quicquam obſtat, ut pro una fluxus velocitatis ſit nullus; pro aliis vero, vel conſtans ſit, vel etiam variabilis. Unde, quum id contingit, relate ad priorem quantitatem tantum quantitates indefinite parvæ primi generis locum habebunt; relate vero ad alias, eas quoque, quæ ſecundi ſunt generis, & forte etiam aliorum conſiderare oportebit. Si quæ vero ſit quantitas, quæ inter eas eadem ſemper manet, ac immutata; reſpectu illius fluxus velocitatis, non jam ut nullus, ſed velut imaginarius debet haberi.

469. Nec ſilentio hic præteribimus, quod ubi plures quantitates ſimul generantur, præſtat pro una ex iis fluxum velocitatis, velut nullum, aſſumere; ut ſcilicet per augmenta ejus naſcentia,

tia, quæ produnt * æqualia, deſignari poſſint *art.466.
æqualia illa incrementa, quæ ſubit tempus lapſu ſuo conſtanti, ac uniformi. Jam enim, ad determinanda naſcentia augmenta, quæ ſingulis quantitatibus indeſinenter accedunt, opus eſt æqualibus iis temporis incrementis. Unde, ut eorum accurata menſura habeatur, non abs re erit, conſiderare aliquam quantitatem, velut creſcentem in eadem omnino ratione cum ipſo tempore.

V. Theoriæ præcedentis præclara quædam conſectaria.

470. EX iis, quæ hactenus dicta ſunt de variis generibus quantitatum indefinite parvarum, plura modo præclara conſectaria colligi poſſunt, ſuos deinceps uſus habitura. Priuſquam vero ea deducamus, notetur hic velim, quod ſicuti quantitates jam genitæ vulgo dicuntur finitæ; ita augmenta illa indefinite parva, quæ eis indeſinenter accedunt, tum quantitates infiniteſimales, cum etiam infiniteſimæ paſſim appellantur. Unde, quum volupe ſit in poſterum, tali nomine ea vocitare; operæ pretium eſt, ad infiniteſimas transferre diſtinctionem illam quantitatum indefinite parvarum, quam paulo ante oſtenſam exhibuimus.

471. Dicemus ergo infiniteſimam primi generis, primum naſcens augmentum alicujus finitæ quantitatis; dicemus infiniteſimam ſecundi generis, differentiam inter augmentum primum, & augmentum ſecundum; dicemus infiniteſimam tertii generis, differentiam, quæ inter duas illiuſ-

tiplicandi, & multiplicatoris dabit exponentem producti; exponens vero diviſoris, ſubductus ab exponente dividendi, relinquet exponentem quotientis. Ita infiniteſima primi generis, multiplicata per infiniteſimam ſecundi generis, producet infiniteſimam generis tertii, quia 1 + 2 eſt 3; & infiniteſima ſecundi generis, multiplicata per infiniteſimam generis tertii, dabit pro producto infiniteſimam generis quinti, quia 2+3 eſt 5. Atque ita quoque id, quod producitur, dividendo infiniteſimam generis quarti per infiniteſimam generis tertii, erit infiniteſima primi generis, quia 4 — 3 eſt 1; & id, quod gignitur, dividendo infiniteſimam noni generis per infiniteſimam generis quarti, erit infiniteſima generis quinti, quia 9 — 4 eſt 5.

476. Jam exponens *quantitatis finitæ* in ordine ad exponentes infiniteſimarum eſt *zero*, *ſeu* nihil. Unde, ſi infiniteſima alicujus generis dividatur per infiniteſimam generis ejuſdem, quotiens erit quantitas finita; quandoquidem, facta exponentium ſubductione, nihil remanet. Sed, ſi porro dividatur infiniteſima generis ſecundi per infiniteſimam generis tertii, tunc orietur in quotiente infiniteſima, cujus exponens erit — 1; quia ſcilicet 2 — 3 eſt idem, ac — 1. Et ſimiliter, ſi infiniteſima generis tertii dividatur per infiniteſimam generis quinti, producetur infiniteſima, cujus exponens erit — 2; quia nempe 3 — 5 perinde valet, ac — 2. Unde diſcimus, præter infiniteſimas, quarum exponentes ſunt poſitivi, dari infiniteſimas alias, quarum exponentes ſunt negativi.

477. Sed quæ ſit natura harum infiniteſima-

marum, quarum exponentes ſunt negativi; haud arduum erit definire. Nimirum, quum negativum opponatur ſemper poſitivo, profecto, ſicuti infiniteſimæ, exponentes poſitivos habentes, deſignant quantitates indefinite parvas, relate ad quantitates finitas; ita infiniteſimæ, quæ habent exponentes negativos, deſignare debent quantitates indefinite magnas, relate ad eaſdem finitas quantitates. Nec mirum. Nam, ſicuti, deſcendendo a quantitate finita, varia infiniteſimarum genera diſtingui poſſunt; ita viciſſim, aſcendendo ab eadem finita quantitate, varia genera infinitorum poterunt conſiderari. Qua ratione quantitas, quæ ſit ad quantitatem finitam, ut eſt quantitas finita ad infiniteſimam primi generis, dicenda eſt quantitas infinita generis primi. Et ſimiliter quantitas, quæ ita ſe habeat ad quantitatem finitam, ut eſt quantitas finita ad infiniteſimam ſecundi generis, quantitas infiita generis ſecundi poterit appellari.

478. Itaque, dividendo infiniteſimam generis ſecundi per infiniteſimam generis tertii, producetur quantitas infinita generis primi; pariterque, dividendo infiniteſimam tertii generis per infiniteſimam generis quinti, quotiens erit quantitas infinita generis ſecundi. Sed & ipſæ quantitates infinitæ poterunt eadem ratione, tam inter ſe, quam cum ipſis infiniteſimis multiplicari, ac dividi. Sic quantitas infinita generis primi, multiplicata per infiniteſimam generis ſecundi, producet infiniteſimam generis primi; diviſa vero per eandem infiniteſimam, dabit pro quotiente quantitatem infinitam generis tertii. Atque ita quoque infiniteſima primi generis, mul-

multiplicata per quantitatem infinitam generis tertii, producet quantitatem infinitam generis ſecundi; diviſa vero per eandem quantitatem infinitam, dabit pro quotiente infiniteſimam generis quarti.

479. Atque hinc ſequens theorema ſua ſponte profluit, quod ſi quantitas infinita cujuſcumque generis multiplicetur per infiniteſimam generis non diſſimilis, productum ſit ſemper quantitas finita; quandoquidem, additis ſimul exponentibus, ſumma ſit zero, ſeu nihil. Unde viciſſim duo alia theoremata colligere licebit. Primum eſt, quod ſi quantitas aliqua finita dividatur per infiniteſimam cujuſcumque generis, quotiens debet eſſe quantitas infinita generis non diſſimilis. Alterum eſt, quod ſi quantitas aliqua finita dividatur e contra per quantitatem infinitam cujuſcumque generis, quotiens oriri debet infiniteſima generis non diverſi.

480. Cæterum, ſi in conſtituendis generibus infiniteſimarum eo uſque cogitatione progredi fas ſit, ut tandem ad zero abſolutum deveniatur; omnino neceſſe eſt, ut viciſſim in ordinandis generibus infinitorum eo uſque aſcendere liceat, ut tandem deveniatur ad infinitum abſolutum. Unde non verebimur de infinito abſoluto, & de zero abſoluto hæc tria theoremata ſtatuere. Primo, quod infinitum abſolutum, ductum in zero abſolutum, producit quantitatem finitam. Secundo, quod quantitas finita, diviſa per zero abſolutum, exhibet in quotiente infinitum abſolutum. Et denique, quod quantitas finita, diviſa viciſſim per infinitum

tum abſolutum, producit e contra zero abſolutum,

CAPUT II.

Geneſis, & natura ſerierum infinitarum,

481. Series infinitæ locum habent in calculo rationalium compoſitarum; eæque oriuntur, vel a diviſione, vel ab extractione radicum. Jam enim vidimus ſupra, utramque harum operationum non poſſe ſemper ad exitum perduci. Quumque id contingit quotientes quidem per fractiones, radices autem per radicales quantitates, diximus debere deſignari. Verum ſi libuerit, eas operationes in infinitum extendere, iiſdem plane regulis, quæ pro ipſis traditæ ſunt; tunc vitabuntur fractiones, & radicales quantitates, ſed orientur quantitates aliæ, quæ quum ex infinitis numero terminis conſtent, ſerierum infinitarum nomine vocitantur.

482. Hinc uſus ſerierum infinitarum in calculo rationalium compoſitarum eſt, ut per eas vitentur, tum fractiones, cum radicales quantitates. Id autem intelligi debet; & de iis fractionibus, quarum denominatores ex duabus, aut pluribus partibus conſtant; & de iis quantitatibus radicalibus, quæ compoſitam aliquam quantitatem ſub radicali ſigno complectuntur. Nam cæteroquin fractiones, quæ ſimplices quantitates pro ſuis denominatoribus habent, in ipſis

ſis etiam ſeriebus infinitis occurrunt; & quandoque ab iiſdem ſeriebus, nec etiam eas radicales, quæ ſub ſigno radicali ſimplicem continent quantitatem, excludere licebit.

I. Series numerorum naturalium ad examen revocata.

483. THeoriæ de ſeriebus infinitis duo prima facie negotium non leve faceſſunt. Primum eſt, quod illiuſmodi ſeries, quum ex terminis a ſe mutuo ſejunctis
*art.423. conſtent, diſcretæ quantitatis * obtinent rationem: plane vero non apparet, fieri poſſe, ut diſcreta quantitas ex infinitis numero terminis coaleſcat; quum notio numeri limitationem involvere videatur. Alterum eſt, quod nec etiam intelligi poteſt, quo pacto infiniti numero termini finitæ quantitatis valorem poſſint exhibere; nam ſemper ac ponuntur numero infiniti, videtur, quod infinita pariter eſſe debet quantitas, quæ ex iis componitur.

484. Hæc duo igitur obſtacula ſunt a nobis removenda, priuſquam infinitarum ſerierum geneſim oſtendamus. Et quantum ad primum, haud quidem negamus, ſeries infinitas diſcretæ quantitatis rationem obtinere. Sed, quod diſcreta quantitas ex infinitis numero partibus componi nequeat, id ſane omnino negamus. Pla-
*art.423. ne enim vidimus ſupra *, diſcretam quantitatem oriri, quotieſcumque ipſa quantitas continua ſubit eam diviſionem, cujus natura ſua eſt capax. Quum ergo diviſibilitas quantitatis con-
*art.425. tinuæ abeat * in infinitum, nec ullibi terminum

agno-

agnoſcat; conſequens eſt, ut etiam diſcreta quantitas poſſit ex infinitis numero partibus componi.

485. Neque dicas, continuæ quantitatis diviſionem abire quidem in infinitum; ſed non ideo licere ad ejus portionem infiniteſimam tandem devenire. Id enim ultro concedimus; nec item negamus, ſerierum infinitarum, de quibus hic a nobis agendum eſt, non poſſe terminos omnes peragrari. Hinc vero non ſequitur, quod nequit quantitas diſcreta ex infinitis numero partibus componi. Dividatur namque per continuam, ſi placet, biſectionem quantitas aliqua continua in partes, decreſcentes in ratione dupla. Jamque, ſi eodem tempore, quo ejus diviſio peragitur, componatur ex partibus adeptis quantitas altera diſcreta; abunde liquet, non poſſe illius diviſionem in infinitum abire, quin iſtius compoſitio in infinitum pariter progrediatur.

486. Et ſane ſeriem numerorum naturalium, in qua ſuas ſedes habent omnes diſcretæ quantitates, vel ex eo probari poteſt in infinitum abire, quod ipſa diviſio quantitatis continuæ in infinitum pariter abit. Jam enim numeri naturales oriri concipiuntur per continuam unitatis additionem. Itaque, quia nova diviſione numerus diviſionum præcedentium unitate ſemper augetur; licebit, per repetitam diviſionem quantitatis continuæ omnes gradatim numeros concipere. Unde, ſicuti ea diviſio nullibi terminum agnoſcit, ſed in infinitum poteſt promoveri; ſic & numerorum nullus erit terminus, ſeu finis, ſed ii quoque in infinitum pregredientur.

487.

487. Etſi autem ſeries numerorum naturalium nullibi ſiſtatur, ſed in infinitum abeat; non tamen cenſendi ſunt ejuſdem indolis numeri omnes, quos ea complectitur. Licebit ergo, in duo ſumma genera eos partiri. Unum namque genus erit eorum, in quibus quouſque repetita ſit unitas, mente aſſequi poſſumus. Et hujuſmodi numeros effabiles, ſeu exprimibiles appellabimus; quia, ſicuti ab unitate ad eos uſque progredi licet, ſic exprimi, enunciarique pariter poſſunt. Alterum genus erit illorum, qui quoties unitatem continent, nequit definiri. Et quum tales numeri nec item exprimi, enunciarique poſſint; ineffabiles, ſeu inexprimibiles eos dicemus.

488. Eſt vero inter utriuſque generis numeros illud diſcrimen, quod qui prioris ſunt generis, ordine ſumpti, progreſſionem componunt dumtaxat arithmeticam; qui vero pertinet ad ſecundum genus, ubi ordine capiuntur, progreſſionem conſtituunt, tum arithmeticam, cum geometricam. Plane enim, quod utriuſque generis numerorum progreſſio ſit arithmetica; id ex eo liquet, quod ex unitate ſæpius repetita omnes oriuntur. Quod autem ii, qui ſecundi ſunt generis, conſtituant progreſſionem geometricam, ſuaderi id poteſt hac ratione.

489. Nimirum, jam convenit apud Geometras, æquales fieri tandem eas quantitates, quarum differentia minor ſemper, ac minor evadit. Capiantur ergo in ſerie numerorum naturalium duo numeri, ſe ſtatim excipientes; tum in ordine ad eos quæratur tertius geometrice proportionalis. Sane hunc majorem eſſe eo, qui duos il-

illos immediate ſubſequitur, haud quidem negamus; ſed differentia inter utrumque eo minor deprehendetur, quo magis duo illi aſſumpti numeri ab unitate, ſeu principio ſeriei removentur. Quare neceſſe eſt, ut tandem ei æqualis oriatur.

490. Sic tertius geometrice proportionalis poſt 1, & 2 eſt 4, qui differt a 3 per unitatem. Sed tertius, qui geometricam proportionem conſtituit poſt 2, & 3, eſt 9 : 2, qui differt a 4 per ſemiſſem unitatis. Et, qui geometrica proportione excipit duos 3, & 4, eſt 16 : 3, qui differt a 5 per unitatis trientem. Fit itaque differentia continuo minor, ac minor. Unde deveniendum eſt tandem ad numeros tales, ut, qui poſt ipſos eſt tertius geometrice proportionalis, adæquet illum, qui in ipſa ſerie numerorum naturalium immediate eos ſubſequitur.

491. Quod autem hujuſmodi ſunt numeri illi, quos ineffabiles, ſeu inexprimibiles appellavimus, nec item in dubium poteſt revocari. Quantitates enim, quarum differentia fit ſemper minor, ac minor, tunc demum evadunt æquales, quum differentia illa oritur minor quavis differentia aſſignabili. Plane vero numeri inexprimibiles per id ipſum, quod exprimi nequeunt, majores ſint oportet quocumque numero, qui poſſit aſſignari. Unde omnino neceſſe eſt, ut relate ad eos differentia illa, de qua agitur, fiat minor quacumque differentia aſſignabili.

492. Licebit ergo, demonſtrationem ejus, de quo eſt quæſtio, hunc in modum concipere. Sit n numerus aliquis inexprimibilis, adeoque major quocumque numero aſſignabili. Dico,

tertium geometrice proportionalem poſt n, & $n + 1$, eſſe $n + 2$. Si enim ille, per regulam paſſim notam, inveniatur, prodibit $n + 2 + 1 : n$. Sed $1 : n$ eſt fractio minor quacumque fractione aſſignabili. Quare talis etiam erit differentia inter $n + 2$, & $n + 2 + 1 : n$: proindeque numerus, qui poſt duos n, & $n + 1$ geometricam proportionem conſtituit, erit $n + 2$.

493. Atque hinc modo definiri quodammodo poteſt limes inter utrumque genus numerorum, tametſi ex uno in aliud genus, nec liceat tranſire, nec tranſitus intelligi poſſit. Nimirum, numeros exprimibiles ad eum uſque progredi cogitandum eſt, donec unitas, per ipſum diviſa, exhibet fractionem, tantum non evaneſcentem, relate ad eundem numerum. Per contrarium vero putandum eſt, incipere numeros inexprimibiles ab eo numero, per quem ſi unitas dividatur, oritur fractio, relate ad eum prorſus evaneſcens.

494. Unde etiam adumbrare quodammodo licebit numerum illum, qui pro infinito debet haberi, & ad quem uſque progreditur ſeries numerorum naturalium. Jam enim numerus infinitus talis ſit oportet, ut per unitatis additionem non amplius augeatur, Quare fiet ei locus, quum relate ad eum ipſa unitas prorſus evaneſcet: & propterea omnino neceſſe eſt, ut numerus infinitus ſit ad eum, qui limes extat inter utrumque genus numerorum, ut eſt idem hic numerus ad unitatem.

495. Non inficior, computum iſtum nihil certi, ac determinati nobis exhibere. Sed meminiſſe oportet, quod agitur de numeris, qui natu-

tura ſua nullam determinationem patiuntur. Fateor quoque, theoriam iſtam non omni prorſus difficultate vacare. Verum id limitationi noſtræ mentis potius ferri debet acceptum; nec proinde in me ſuſcipere vellem ſolutionem eorum omnium, quæ contra objici poſſunt. Ut autem pateat, theoriam iſtam a vero non abludere; oſtendemus hic breviter, qua ratione ex iis numeris, quos vocamus ineffabiles, ſeu inexprimibiles, radicales numeri oriantur.

II. Numerorum radicalium, tum item fractionum natura, ac geneſis explicata.

496. IN ſerie numerorum naturalium, qualem paulo ante deſcripſimus, omnes quantitatum rationes continentur. Jam enim in ea duo extant * numerorum genera; *art. 487.* unum eorum, qui exprimi, enunciarique poſſunt; illorum alterum, quos nulla ratione exprimere, ac enunciare fas eſt. Quare, ſicuti per numeros prioris generis exhibentur rationes quantitatum commenſurabilium; ita per numeros alterius generis quantitatum incommenſurabilium rationes viciſſim poterunt exhiberi.

497 Ut melius id intelligatur, præſtat prius inquirere in differentiam, quæ inter utriuſque generis quantitates intercedit. Sane vulgo habentur, ut quantitates commenſurabiles, quæ communem quandam menſuram admittunt; habentur vero, ut quantitates incommenſurabiles, quarum nulla extat menſura communis. Sed hujuſmodi definitiones non ſatis accuratæ videntur; quandoquidem omnes quantitates com-

munem aliquam menſuram admittunt.

498. Sint namque duæ quævis quantitates *a*, & *b*, una quidem major, & altera minor. Dico, duas iſtas quantitates admittere menſuram aliquam communem. Subducatur enim, quouſque fieri poteſt, & minor ex majore, & reſiduum primum ex minore, & reſiduum ſecundum ex reſiduo primo, & reſiduum tertium ex reſiduo ſecundo, atque ita deinceps. Sane, evenire tandem oportebit, vel ut nihil prorſus ſuperſit, vel ut id, quod remanet, ſit indeſinitæ parvitatis, relate ad utramque quantitatem. Unde reſiduum, quod illud præcedit, erit utriuſque quantitatis menſura communis.

499. Id quum ita ſit, videtur, de utriuſque generis quantitatibus ſic potius ſtatui debere, ut quantitates dicantur commenſurabiles, quum definiri poteſt, quoties earum menſura communis eaſdem metitur; dicantur vero incommenſurabiles, quum viciſſim determinari id nequit. Unde liquido patet, rationes quantitatum commenſurabilium quærendas eſſe in numeris prioris generis; per contrarium vero rationes quantitatum incommenſurâbilium in numeris, qui ſecundi ſunt generis, ſuas ſedes habere.

500. Et quidem, ſi quantitatum rationes in propriis ſuis ſedibus quærerentur, nulli forent numeri fracti, nulli item numeri radicales. Ponamus enim, quod duarum quantitatum *a*, & *b* menſura communis metitur quinquies majorem *a*, & ter minorem *b*. Jamque, ſi rationem earum quantitatum quæramus in ſede ſua propria; fiet, ut *a* ad *b*, ita 5 ad 3. Sed quandoque pro priore

re termino rationis aſſumimus ipſam unitatem; & tunc omnino neceſſe eſt, ut alter terminus ſit numerus fractus, nimirum 3 : 5.

501. Eadem ratione, ſi ponamus, duarum quantitatum *a*, & *b* menſuram communem adeo pluries eas metiri, ut numeri vicium ſint prorſus inaſſignabiles; quærenda eſſet ratio earum quantitatum in iis numeris, quos vocavimus ineffabiles, ſeu inexprimibiles. Verum, quia limitatione noſtræ mentis ad eos uſque numeros progredi non poſſumus; pro priore termino ejus rationis aſſumimus numerum aliquem exprimibilem: quo fit, ut terminus alter ejuſdem rationis eſſe debeat numerus aliquis radicalis.

502. Ut ergo oriuntur numeri fracti, quum rationes quantitatum commenſurabilium ex propriis ſuis ſedibus ad unitatem, ſeriei initium, retrahuntur; ſic ortum habent numeri radicales, quum rationes quantitatum incommenſurabilium quæruntur, non jam inter numeros ineffabiles, in quibus habent ſuas proprias ſedes, ſed inter eos, qui exprimi, enunciarique poſſunt. Nec difficile id erit oſtendere, ſi probe conſideremus, numeros radicales aliud non eſſe, quam medias proportionales geometricas inter unitatem, & numeros illos, qui ſub ſignis radicalibus reperiuntur.

503. Plane enim $\sqrt{2}$ eſt quadrata radix, eliciendа ex numero 2. Quare ex ſuperius * oſtenſis non aliud erit $\sqrt{2}$, quam media proportionalis inter 1, & 2. Similiter $\sqrt[3]{2}$ eſt radix cubica, extrahenda ex numero 2. Unde per id, quod ſupra * oſtenſum eſt, $\sqrt[3]{2}$ erit prima ex duabus mediis proportionalibus inter 1, & 2. *Art. 338.* *Art. 339.*

Et generaliter, ſi index ſigni radicalis ſit quilibet numerus n, & ſub tali ſigno reperiatur numerus 2; erit iſtiuſmodi numerus radicalis prima ex tot mediis proportionalibus inter 1, & 2, quot deſignat $n - 1$.

504. Hac obſervatione præmiſſa, memoria modo recolamus id, quod ſupra * oſtenſum eſt circa numeros ineffabiles; nimirum, eos ordine ſumptos, non modo arithmeticam, ſed geometricam quoque progreſſionem conſtituere. Inde enim ſequitur, quod ſi N ſit numerus aliquis ineffabilis, & inter 1, & 2 inveniantur tot mediæ proportionales geometricæ, quot deſignat N — 1; nequit N per unitatem exhiberi, niſi omnes alii ineffabiles numeri, qui cadunt inter N, & 2N, per inventas medias proportionales exhibeantur.

* art. 488.

505. Repræſentato namque per unitatem numero N, exhiberi debet per 2 numerus 2N; quum ſit, ut 1 ad 2, ita N ad 2N. Jam vero omnes numeri ineffabiles, qui cadunt inter N, & 2N, conſtituunt progreſſionem geometricam cum ipſis N, & 2N. Quare inventis inter 1, & 2 totidem mediis geometrice proportionalibus, nonniſi per iſtas numeri ii ineffabiles debent repræſentari. Nec dubium eſſe poteſt, quin numerus harum mediarum eſſe debeat N — 1; quandoquidem inter N, & 2N tot præciſe cadunt numeri inexprimibiles, quot deſignat N — 1.

506 Eadem autem ratione oſtendemus, quod ſi numerus inexprimibilis N repræſentetur unitate, & inter 1, & 3 inveniantur tot mediæ proportionales geometricæ, quot deſignat 2N — 1;

— 1; exhiberi debent per medias iſtas omnes numeri inexprimibiles, qui cadunt inter N, & 3N. Et generaliter, ſi inter unitatem, & quemvis numerum exprimibilem *n* quærantur tot mediæ proportionales geometricæ, quot deſignat *n*N — N — 1, iſtæ exhibere debent omnes numeros inexprimibiles,qui cadunt inter N,& *n*N.

507. Atque hinc modo facile erit, oſtendere, quod ſi rationis, inter duas quantitates incommenſurabiles exiſtentis, prior terminus ſit numerus aliquis exprimibilis, terminus alter omnino eſſe debet numerus aliquis radicalis. Sint enim *b*, & *a* duæ quantitates incommenſurabiles, *b* quidem minor, *a* vero major; & rationis, inter ipſas exiſtentis, prior terminus ſit numerus aliquis exprimibilis, & ſi placet, ipſa unitas. Dico, terminum alterum omnino debere eſſe numerum aliquem radicalem.

508. Quoniam ex hypotheſi *b*, & *a* ſunt duæ quantitates incommenſurabiles; earum menſura communis adeo pluries * eaſdem metietur, *art. 499.
ut numeri vicium erunt prorſus inexprimibiles. Sit ergo N numerus inexprimibilis, indicans, quoties communis illa menſura metitur minorem *b*. Qui ergo indicabit, quoties eadem menſura communis metitur majorem *a*, major erit numero N: proindeque cadet inter N, & aliquem ejus multiplicem.

509. Sit *n*N multiplex iſte. Et per ea, quæ mox * oſtenſa ſunt, ſi inter unitatem, & nume- *art. 506.
rum exprimibilem *n* quærantur tot mediæ proportionales geometricæ, quot deſignat *n*N — N — 1, & repræſentetur unitate numerus inexprimibilis N; oportebit, exhibere per medias iſtas

omnes numeros inexprimibiles, qui cadunt inter N, & *n*N: proindeque per aliquam earumdem mediarum exhibendus erit numerus ille inexprimibilis, qui indicat, quoties communis menſura quantitatum *b*, & *a* metitur majorem *a*.

510. Jam vidimus paulo ſuperius *, radices omnes numeri *n* non aliud eſſe, quam medias geometrice proportionales inter unitatem, & ipſum numerum *n*; hoc eſt unam mediam, quum radix eſt quadrata; primam ex duabus mediis, quum radix eſt cubica; primam ex tribus mediis, quum radix eſt quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Quare, quum numerus inexprimibilis, indicans, quoties communis menſura quantitatum *b*, & *a* metitur majorem *a*, exhiberi * debet per unam ex tot mediis proportionalibus, inveniendis inter unitatem, & numerum *n*, quot deſignat *n*N — N — 1; omnino exhibendus ille erit per radicem aliquam numeri *n*.

* art. 509.

511. Jam ergo extra omnem dubitationis aleam eſt, in ſerie numerorum naturalium, omnes quantitatum rationes contineri. Nec ſane aliis opus eſſent numeris, ſi liceret, ſeriem illam ab una ad aliam extremitatem peragrare; & per numeros ejus ſeriei convenientes, ac proprios omnes omnino quantitatum rationes exhiberentur. Verum id mens noſtra finita, ac limitata, nec geſtit, nec patitur. Unde præter eos, qui dicuntur, & ſunt naturales, alios oportuit numeros excogitare: qui proinde non ſunt confundendi cum ipſis numeris naturalibus: aliter enim plura circa numeros paradoxa nobis ſeſe offerent, quibus non aliter, quam diſtinctione illa, poterit accurate ſatisfieri.

III.

III. *Progreſſiones geometricæ decreſcentes ad examen revocatæ.*

512. REmoto eo adverſus ſeries infinitas obſtaculo, quod, velut diſcretæ quantitates, non videntur ex infinitis numero terminis poſſe componi; nunc alterum obſtaculum oportet removeamus, quod non apparet, fieri poſſe, ut infiniti numero termini finitam quantitatem quandoque componant. Et iſtud quidem obſtaculum vel exinde poſſet removeri, quod quantitas continua, etiam quum finita eſt, infinitas ſubit diviſiones, infinitumque adeo numerum partium nobis ſuppeditat. Sed, ut argumentum a diſcreta quantitate petamus, conſiderabimus hic progreſſiones geometricas decreſcentes, quarum termini, etſi numero infiniti, ſimul tamen collecti finitam ſummam conſtituunt.

513. Hunc in finem ſciendum eſt primo, quod ſicuti progreſſiones geometricæ extendi poſſunt in infinitum, nec ullibi limitem agnoſcunt; ſic eædem dicuntur decreſcentes, quum in iis quiſq; terminus eſt major ſuo ſubſequente. Sit ergo a prior terminus progreſſionis, eademque decreſcat in ea ratione, quam habet n ad 1. Erit itaque $a:n$ ſecundus terminus, $a:n^2$ terminus tertius, $a:n^3$ terminus quartus, atque ita deinceps. Colligantur jam in unum omnes ejus termini, & fiet ſumma omnium æqualis quantitati finitæ $na:(n-1)$.

514. Neque vero difficile id erit oſtendere. Quum enim progreſſio ſit decreſcens, ultimus ejus

ejus terminus, ſi ita loqui fas ſit, velut nullus debet haberi. Quare, ſi vocetur s ſumma omnium terminorum; erit adhuc s ſummma omnium antecedentium, & $s - a$ ſumma omnium conſequentium. Unde, quum ex notiſſimo theoremate Euclidæo eſſe debeat, ut s ad $s - a$, ita n ad 1; erit convertendo, ut s ad a, ita n ad $n - 1$: proindeque ſumma quæſita s erit æqualis quantitati finitæ $na : (n - 1)$.

515. Quod ſi hæc demonſtratio paulo durior videatur, quia de ultimo progreſſionis termino in ea fit mentio; licebit, eam lenire in hunc modum. Fiat rurſus ab a progreſſio, decreſcens in ea ratione, quam habet n ad 1, quæ continuetur uſque ad alium quemvis terminum c. Dico, ſummam s omnium ſuorum terminorum eſſe $(na - c) : (n - 1)$. Nam in iſto caſu fit $s - c$ ſumma omnium antecedentium, & $s - a$ ſumma omnium conſequentium. Unde, quum eſſe debeat, ut $s - c$ ad $s - a$, ita n ad 1; comperiemus ſummam quæſitam s æqualem quantitati $(na - c) : (n - 1)$.

516. Quoniam autem progreſſio continuo decreſcit; termini ejus fiunt ſemper minores, ac minores. Nihil itaque obſtat, pro c ſumere terminum, qui ſit indefinitæ parvitatis relate ad priorem a. Quumque in iſto caſu $na - c$ ſit idem*, ac na; fiet ſumma omnium terminorum s æqualis quantitati $na : (n - 1)$. Unde, ſi oſtendi poſſit, omnes alios terminos progreſſionis, qui c ſubſequuntur, ſimul collectos exhibere ſummam indefinite parvam relate ad $na : (n - 1)$; erit * eadem quantitas $na : (n - 1)$ ſumma totius progreſſionis.

* Art. 447.

* Art. 447.

517.

517. Id vero nullo negotio oſtendemus. Si enim capiatur in progreſſione terminus alius, qui ſit ad c, ut eſt c ad a; hic erit $c^2 : a$, & relate ad ipſum c erit indefinitæ quoque parvitatis. Unde ſumma terminorum, qui a c uſque ad $c^2 : a$ progrediuntur, ex oſtenſis * erit $nc : (n - 1)$: quæ quidem eſt indefinitæ parvitatis relate ad $na : (n - 1)$; quum ratio unius ad alteram ſit illa eadem, quam habet c ad a. *art.516.

518. Eadem ratione, ſi capiatur in progreſſione terminus alter, qui ſit ad $c^2 : a$, ut eſt $c^2 : a$ ad c, ſive etiam, ut eſt c ad a; hic erit $c^3 : a^2$, & relate ad ipſum $c^2 : a$ erit pariter indefinite parvus. Quare ſumma terminorum, qui a $c^2 : a$ progrediuntur uſque ad $c^3 : a^2$, per ſuperius oſtenſa *, erit $nc^2 : a (n - 1)$: quæ eſt indefinitæ parvitatis, non modo relate ad ſummam primam $na : (n - 1)$, verum etiam reſpectu alterius $nc : (n - 1)$; quum ratio, quæ inter ipſas intercedit, ſit æqualis ei rationi, quam habet c ad a. *art.516.

519. Eodem prorſus argumento oſtendemus, eſſe $nc^3 : a^2 (n - 1)$ ſummam omnium terminorum, qui progrediuntur a $c^3 : a^2$ uſque ad $c^4 : a^3$; eſſe $nc^4 : a^3 (n - 1)$ ſummam omnium illorum, qui a $c^4 : a^3$ protrahuntur uſque ad $c^5 : a^4$; atque ita deinceps. Unde, quia omnes iſtæ ſummæ ejus naturæ deprehenduntur, ut quælibet ipſarum ſit indefinitæ parvitatis, tum relate ad ſummam priorem $na : (n - 1)$, cum reſpectu ejus, quam immediate ſubſequitur; conſequens * eſt, ut ſumma totius progreſſionis ſit $na : (n - 1$. *art.447. 472.

520. Non ergo dubitari poteſt, quod ſit $na :$

$(n -$

(n — 1) ſumma omnium infinitorum terminorum progreſſionis geometricæ, incipientis ab a, & decreſcentis in ea ratione, quam habet n ad 1. Unde, ope hujus theorematis generalis, facile erit, determinare ſummam finitam, quam omnes termini cujuſcumque progreſſionis geometricæ decreſcentis ſimul collecti conſtituunt. Quod non abs re fore judicamus, uno, aut altero exemplo illuſtrare, ut eo magis pateat, infinitos numero terminos poſſe ſimul finitam quantitatem quandoque componere.

521. Primo itaque fiat progreſſio geometrica, ſubinde decreſcens, ut quiſque terminus ſubſequens ſit ſemiſſis ſui præcedentis. Jamque, ſi prior terminus ſtatuatur a; erit ſecundus $a : 2$, tertius $a : 4$, quartus $a : 8$, quintus $a : 16$, atque ita deinceps. Decreſcit ergo in hoc caſu progreſſio in ea ratione, quam habet 2 ad 1. Quare in theoremate generali erit 2 valor ipſius n: & propterea, ſicuti fractio $na : (n - 1)$ vertitur in $2a$; ſic erit $2a$ ſumma omnium infinitorum terminorum conſtitutæ progreſſionis.

522. Fiat ſecundo progreſſio geometrica, tali pacto decreſcens, ut quiſque terminus ſubſequens ſit triens ſui præcedentis. Et ſiquidem prior terminus adhuc ſtatuatur a; erit ſecundus $a : 3$, tertius $a : 9$, quartus $a : 27$, quintus $a : 81$, atque ita deinceps. Jam in hoc caſu progreſſio decreſcit in ea ratione, quam habet 3 ad 1. Unde in theoremate generali erit 3 valor ipſius n: proindeque, quemadmodum fractio $na : (n - 1)$ evadit $3a : 2$; ita erit $3a : 2$ ſumma, quam conſtitutæ progreſſionis termini omnes ſimul collecti exhibent.

523.

523. Fiat tertio progreſſio geometrica, ea lege decreſcens, ut quilibet terminus ſubſequens ſit quadrans ſui præcedentis. Jamque, ſi pro termino priore capiatur pariter a, fiet ſecundus $a:4$, tertius $a:16$, quartus $a:64$, quintus $a:256$, atque ita deinceps. Et quoniam in hoc caſu progreſſio decreſcit in ea ratione, quam habet 4 ad 1; erit 4 valor ipſius n in theoremate generali. Unde, ſicuti fractio $na:(n-1)$ evadit $4a:3$; ſic erit $4a:3$ ſumma omnium infinitorum terminorum conſtitutæ progreſſionis.

524. Eadem ratione determinare licebit ſummas finitas omnium aliarum progreſſionum geometricarum, ſubinde decreſcentium, ut quiſque terminus ſubſequens ſit data pars aliquota ſui antecedentis. Sed, ſi quiſque terminus fuerit ſui præcedentis pars data aliquanta, vi ejus theorematis generalis, adhuc finita ſumma totius progreſſionis poterit definiri. Ita, ſi progreſſio ea lege decreſcat, ut quiſque terminus ſubſequens adæquet duos trientes ſui præcedentis, & prior terminus ſtatuatur a; fiet ſumma omnium ejus infinitorum terminorum $3a$. Nam, quum in hac hypotheſi progreſſio decreſcat in ea ratione, quam habet $3:2$ ad 1; erit $3:2$ valor ipſius n in theoremate generali; adeoque fractio $na:(n-1)$ evadet $3a$.

525. Ope ejuſdem theorematis generalis, determinari quoque poteſt ſumma omnium infinitorum terminorum progreſſionis geometricæ decreſcentis, in qua tantum per radicales numeros definire licet, quanto quiſque terminus ſubſequens minor ſit relate ad ſuum præcedentem. Ita, ſi velimus, unumquemque ſubſequen-

quentem adæquare eam partem ſui præcedentis, quam denominat $\sqrt{2}$, & ponamus a eſſe primum progreſſionis terminum; fiet ſumma quæſita $a\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$. Nam in iſto caſu progreſſio decreſcit in ea ratione, quam habet $\sqrt{2}$ ad 1; adeoque, quum ſiat $\sqrt{2}$ valor ipſius n in theoremate generali, erit $a\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$ valor fractionis $na : (n - 1)$.

526. Cæterum nolo hic reticere, progreſſionis geometricæ decreſcentis terminos omnes tunc quidem ſimul collectos exhibere ſummam finitam, quotieſcumque ſenſibiliter decreſcit. Nam, ſi contingat, eam decreſcere inſenſibiliter; adeo nempe, ut differentia terminorum rationis, in qua decreſcit, ſit indefinite parva, relate ad utrumque terminum; tunc ſumma orietur infinita. Quod ſane ex ipſo theoremate generali abunde deducitur. Etenim, quum ſumma debeat eſſe generaliter æqualis fractioni
*art.479. $na : (n - 1)$; per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, liquet, valorem hujus fractionis debere eſſe indefinite magnum, quum $n - 1$ eſt indefinitæ parvitatis relate ad n.

IV. *Geneſis ſerierum infinitarum ex diviſione.*

527. REmotis iis obſtaculis, quæ in doctrina ſerierum infinitarum moram facere poterant; ipſam modo earum ſerierum geneſim, ac naturam oſtendamus: Et
art.481. quidem diximus initio hujus capitis, oriri ſeries infinitas, vel a diviſione rationalium compoſitarum, vel ab extractione radicum ex iiſdem rationalibus. Unde primo oſtendemus, quo pacto

cto oriantur ſeries infinitæ ex diviſione; tum, qua ratione ab extractione radicum ſuam illæ originem trahant, explicabimus.

528. Notum eſt in diviſione numerorum, quod quum diviſor non eſt pars aliquota numeri dividendi, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum. Ad eundem itaque modum in diviſione quantitatum, quæ Alphabeti litteris ſunt deſignatæ, ſi contingat, ut diviſor, qui ex duabus, aut pluribus partibus conſtet, non exacte contineatur in quantitate dividenda; diviſio in infinitum per fractiones ſimplices poterit continuari.

529. Proponatur, exempli cauſa, dividenda quantitas ſimplex b^2 per quantitatem aliam compoſitam $a - c$. Plane diviſio fieri nequit; quia ſcilicet diviſor $a - c$ non exacte continetur in quantitate dividenda b^2: proindeque deſignandus eſt quotiens, quemadmodum ſuo loco
* docuimus, per fractionem compoſitam $b^2 : (a - c)$. Sed, adhibitis fractionibus ſimplicibus, en quo pacto inſtitui poteſt diviſio, eademque in infinitum continuari. *art.449.

530. Dividatur primo quantitas b^2 per primam partem diviſoris a. Jamque, multiplicato quotiente $b^2 : a$ per diviſorem ipſum $a - c$, producitur quantitas $(ab^2 - cb^2) : a$, ſive etiam $b^2 - cb^2 : a$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda b^2 relinquit $cb^2 : a$. Itaque dividatur ſecundo reſiduum iſtud $cb^2 : a$ per eandem partem diviſoris a; & habebitur alter quotiens $cb^2 : a^2$.

531. Jam alter iſte quotiens $cb^2 : a^2$, ductus in diviſorem $a - c$, producit quantitatem $(acb^2$

$- c^2b^2):$

$-c^2b^2$) : a^2, ſive etiam $cb^2 : a - c^2b^2 : a^2$, quæ ſubducta ex illo reſiduo $cb^2 : a$ relinquit $c^2b^2 : a^2$. Quare dividatur tertio novum iſtud reſiduum per a, ut habeatur tertius quotiens $c^2b^2 : a^3$. Quumque ex hac diviſione novum adhuc oriatur reſiduum, nec unquam diviſio fieri poteſt exacte; liquet, operationem abire in infinitum, totumque adeo quotientem diviſionis ex infinitis numero terminis compoſitum oriri.

532. Eſt autem integer diviſionis quotiens ſeries infinita $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 +$ &c., cujus termini conſtituunt progreſſionem geometricam, in ea ratione progredientem, quam habet a ad c. Unde, ad continuandam ſeriem illam, trahentem a diviſione originem ſuam, haud quidem neceſſe eſt, diviſionem ipſam continuare; ſed ſatis erit, ei progreſſioni geometricæ novos continuo terminos apponere.

533. Valor ergo compoſitæ fractionis $b^2 (a - c)$ eſt ſeries infinita $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 +$ &c. Jam ſeries iſta fit $b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a +$ &c., hoc eſt fractio ſimplex $b^2 : a$ infinities ſumpta, quum a, & c inter ſe ſunt æquales. Unde, quia in hypotheſi hujus æqualitatis $a - c$ idem eſt, ac zero, ſeu nihil; liquet

*Art.480. veritas theorematis, ſuperius * poſiti, nempe quod debet eſſe infinitus quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam per zero, ſeu nihil abſolutum.

534. Et ſane non video, cur id mirum nonnullis cenſeri debeat. Jam enim notum eſt, quotientem, qui oritur ex diviſione alicujus datæ

quan-

quantitatis, eo majorem oriri, quo minor eſt quantitas altera, per quam dividitur. Quare, ſi hæc minuatur in infinitum, hoc eſt eo uſque, ut evaneſcat, & fiat nulla; omnino neceſſe eſt, ut per contrarium quotiens augeatur in infinitum, & infinitus prorſus evadat.

535. Neque vero, ut infinita evadit ſumma ſeriei infinitæ $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5$ &c., quum a & c inter ſe ſunt æquales; ſic pariter infinita cenſenda eſt ſumma ejuſdem ſeriei, quum a major eſt, quam c. Nam, etſi ſeries illa etiam in hoc caſu componatur ex infinitis numero terminis; attamen termini iſti, ut jam dictum * eſt, conſtituunt progreſſionem geometricam, decreſcentem in ea ratione, quam habet a ad c; atque adeo, per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, iidem termini ſimul collecti component quantitatem finitam.

* art. 532.

* art. 513.

536. Oritur autem hoc loco difficultas, quam ſilentio præterire nolo. Nimirum, etſi veriſſimum ſit, ſummam ſeriei infinitæ $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 +$ &c. eſſe finitam, quum a major eſt, quam c; eadem tamen ſumma prodit infinita, quum viciſſim a minor eſt, quam c; quandoquidem in hoc caſu termini ipſius ſeriei conſtituunt progreſſionem geometricam, creſcentem in ea ratione, quam habet a ad c. Unde, quia in hypotheſi, quod a ſit minor, quam c, fractio $b^2 : (a - c)$ fit negativa; ſequeretur exinde, quantitatem finitam negativam adæquare quantitatem infinitam poſitivam.

537. Pro hujus difficultatis enodatione, præſtat prius advertere, quod per ſeries infini-

tas propius ſemper, ac propius ad quæſitæ quantitatis valorem debet accedi. Verum, ubi a minor eſt, quam c, tantum abeſt, ut capiendo a, velut primam partem diviſoris, propius ſemper, ac propius ad quæſitum quotientem per continuam diviſionem accedamus, quin potius magis ſemper, ac magis ab eo recedimus; quum id, quod ſupereſt in qualibet diviſione, majus ſemper oriatur quantitate diviſa.

538. Hinc itaque diſcimus, quod ubi a minor eſt, quam c, pro prima parte diviſoris capi debet $-c$. Profecto autem dividendo b^2 per $-c+a$, emergit ſeries infinita $-b^2:c-ab^2:c^2-a^2b^2:c^3-a^3b^2:c^4-a^4b^2:c^5-$ &c., cujus termini, quum conſtituant progreſſionem geometricam decreſcentem, dabunt ſimul collecti ſummam finitam, eamque negativam. Unde, in conſtituendis ſeriebus infinitis, ope diviſionis, in id ſedulo incumbendum eſt, ut pro prima diviſoris parte major ſemper quantitas capiatur.

539. Quod ſi volupe ſit in caſu, de quo agitur, ſeriem infinitam $b^2:a+cb^2:a^2+c^2b^2:a^3+c^3b^2:a^4+c^4b^2:a^5+$ &c. conſiderare, veluti ortam ex diviſione quantitatis b^2 per aliam $a-c$; tunc natura illius ſeriei hæc erit, ut ad infinitum uſque continuata debeat deſcendere per totidem terminos negativos uſque ad $-b^2:a$, ubi neque etiam ſiſtitur, ſed deprimitur adhuc in infinitum per terminos alios negativos $-b^2:c-ab^2:c^2-a^2b^2:c^3-a^3b^2:c^4-a^4b^2:c^5-$ &c.: quo fit, ut deletis terminis, qui contrarietate ſignorum ſeſe mutuo deſtruunt, reducatur ad $-b^2:c-ab^2:c^2-a^2b^2:c^3-$

$a^3b^2:$

$a^3b^2 : c^4 - a^4b^2 : c^5 -$ &c., cujus ſumma eſt quantitas finita negativa.

540. Cæterum, ſi dividenda ſit quantitas ſimplex b^2 per aliam compoſitam $a + c$, & capiatur a, velut prima pars diviſoris; habebitur pro quotiente ſeries infinita $b^2 : a - cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 - c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 -$ &c., cujus termini ſignis $+$, & $-$ alternatim afficiuntur. Hinc vero paradoxum fluit non inelegans: nimirum, quod ſeries iſta infinita $b^2 : a - b^2 : a + b^2 : a - b^2 : a + b^2 : a -$ &c., cujus termini contrarietate ſignorum ſeſe mutuo deſtruere videntur, adæquat quantitatem finitam $b^2 : 2a$. Nam, ubi a, & c ponuntur æquales, ſicuti prior ſeries vertitur in illam, ſic fractio $b^2 : (a + c)$ mutatur in hanc aliam $b^2 : 2a$.

541. Pro paradoxi hujus ſolutione, haud quidem dici poteſt, quod ultimus ſeriei terminus, exhauſta infinitate, oritur affectus ſigno $+$. Sic enim fiet ſumma ſeriei $b^2 : a$, & non $b^2 : 2a$. Intelligetur autem, unde fluit paradoxum iſtud, ſi dividatur b^2 per $a + a$. Hac ſiquidem ratione patebit, poſt duas quaſque diviſiones, ſeſe deſtruere partes quotientis, ſed rurſus emegere b^2 pro dividenda quantitate. Ex quo fiet, ut, exhauſta infinitate, ultimus ſeriei terminus, non modo concipiendus ſit affectus ſigno $+$, verum etiam eſſe debeat $b^2 : 2a$; quia id, quod ultimo relinquitur dividendum per $a + a$, ſive etiam $2a$, eſt ipſa quantitas b^2.

V. *Geneſis ſerierum infinitarum ex extractione radicum.*

542. Non diſſimiliter ſeries infinitæ ſuum ortum trahunt ex extractione radicum. Jam enim notum eſt, quod quum radix extrahi debet ex numero aliquo, qui non ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum. Ad eundem itaque modum, quotieſcumque in calculo litterali extrahi nequit quæſita radix ex rationali aliqua compoſita; adhibitis fractionibus ſimplicibus, exprimi illa poterit per ſeriem infinitorum numero terminorum. Quod ut liquido conſtet, dabimus hujus rei duplex ſpecimen, unum in extractione radicis quadratæ, & alterum in extractione radicis cubicæ.

543. Proponatur itaque primo extrahenda quadrata radix ex $a^2 + b^2$. Hæc per regulam, ſuperius traditam, nequit haberi. Nam quadratum quantitatis, duabus ex partibus conſtantis, componi debet * ex quadratis partium, duploque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione. Plane vero in propoſita quantitate, etſi adſint quadrata partium a, & b, duplum tamen ejus, quod producitur ex iis, per ſe mutuo multiplicatis, minime adeſt. Quocirca radix illa deſignanda eſſet per $\surd(a^2 + b^2)$. Interim, continuata in infinitum operatione, qua quadrata radix extrahitur, licebit, eandem illam radicem exprimere per ſeriem infinitorum numero terminorum.

* art. 82.

544.

544. Primo igitur extrahatur quadrata radix ex priore termino a^2; eoque deleto, dividatur terminus alter b^2 per duplum ejus radicis $2a$. Jam, multiplicato poſtea quotiente hujus diviſionis $b^2 : 2a$ per duplum illud, factoque quadrato ejuſdem quotientis, oritur quantitas $b^2 + b^4 : 4a^2$, quæ ſubtracta ex quantitate propoſita, priore termino multata, relinquit $- b^4 : 4a^2$. Itaque, duplicata radice hactenus acquiſita $a + b^2 : 2a$, per priorem ejus partem $2a$ dividatur reſiduum illud $- b^4 : 4a^2$; eritque quotiens $- b^4 : 8a^3$ pars tertia quæſitæ radicis.

545. Et quoniam quadratum hujus quotientis $b^8 : 64a^6$, additum ei, quod producitur, multiplicando duplum ipſius $a + b^2 : 2a$ per $- b^4 : 8a^3$ dat quantitatem $- b^4 : 4a^2 - b^6 : 8a^4 + b^8 : 64a^6$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit $+ b^6 : 8a^4 - b^8 : 64a^6$; fiat rurſus duplum radicis hactenus acquiſitæ $a + b^2 : 2a - b^4 : 8a^3$, & per priorem ejus partem $2a$ dividatur prior terminus novi illius reſidui $+ b^6 : 8a^4$; qua ratione alter hic quotiens $+ b^6 : 16a^5$ erit pars quarta quæſitæ radicis. Quumque per hanc operationem novum adhuc oriatur reſiduum, nec unquam operatio fieri poteſt exacte, liquet, extractionem quæſitæ radicis abire in infinitum, ipſamque adeo radicem per ſeriem infinitorum numero terminorum expreſſam oriri.

546. Radix ergo quadrata propoſitæ quantitatis $a^2 + b^2$ eſt ſeries infinita $a + b^2 : 2a - b^4 : 8a^3 + b^6 : 16a^5 - 5b^8 : 128a^7 +$ &c.: quæ quidem, ſicuti mutatur in hanc aliam $a + a : 2 - a : 8 + a : 16 - 5a : 128 +$ &c., quum pars

tes quantitatis propoſitæ a^2, b^2 inter ſe ſunt æquales; ſic etiam fiet $1 + 1 : 2 - 1 : 8 + 1 : 16 - 5 : 128 +$ &c.; ſi earum partium unaquæque ponatur æqualis unitati. Unde, quia in hypotheſi, quod, tam a^2, quam b^2 adæquat unitatem, fit $a^2 + b^2$ numerus binarius; liquet, radicem quadratam numeri binarii eſſe ſeriem iſtam infinitam $1 + 1 : 2 - 1 : 8 + 1 : 16 - 5 : 128 +$ &c.

547. Similiter, ſi extrahenda proponatur radix quadrata ex quantitate $a^2 - b^2$, hæc per regulam, ſuperius traditam, neque etiam poterit haberi; tum quia deeſt id, quod bis oritur ex mutua multiplicatione partium a, & b; tum etiam, quia non ambo quadrata partium ſigno $+$ afficiuntur. Sed, adhibita vulgari radicem quadratam extrahendi ratione, & operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda ſeries infinita $a - b^2 : 2a - b^4 : 8a^3 - b^6 : 16a^5 - 5b^8 : 128a^7 -$ &c., in qua, priore termino excepto, omnes alii ſigno $-$ afficiuntur.

548. Sed hic difficultas oritur, prima facie non levis: nimirum, quod ſi radix quadrata quantitatis $a^2 - b^2$ poſſet per ſeries infinitas exhiberi, liceret quoque, quantitatem imaginariam per aliam quantitatem realem exprimere. Jam enim nihil vetat, ſupponere b^2 majorem, quam a^2. Verum iſta poſitione $a^2 - b^2$ fit quantitas negativa; adeoque ejus quadrata radix eſt
*Art. 309. * quantitas imaginaria. Unde ſemper ac radix illa exhiberi poteſt generaliter per ſeriem infinitam $a - b^2 : 2a - b^4 : 8a^3 - b^6 : 16a^5 - 5b^8 : 128a^7 -$ &c.; erit eadem hæc ſeries expreſ-

preſſio ejus radicis etiam, quum illa non eſt realis, ſed evadit imagnaria.

549. Interim reſpondetur, ſequi inde tale quidpiam, ſi in caſu, quod b^2 major ſit, quam a^2, ſeries ad quæſitæ radicis valorem propius ſemper, ac propius accedat. Id autem tantum a vero abeſt, quin potius in eo caſu ſeries a quæſitæ radicis valore magis ſemper, ac magis removetur. Unde ſeries infinita $a - b^2 : 2a - b^4 : 8a^3 - b^6 : 16a^5 - 5b^9 : 128a^7 -$ &c. exhibet quidem radicem quadratam quantitatis $a^2 - b^2$, quum a^2 major eſt, quam c^2; ſed minime illam repræſentat, quum viciſſim a^2 minor eſt, quam b^2.

550. Id ut rectius intelligatur, notandum eſt, in extractione radicis ex data aliqua quantitate idcirco, per repetitas operationes, propius ſemper, ac propius ad ejus valorem accedi; quia ipſa quantitas, unde radix eſt extrahenda, per eaſdem operationes, minor ſemper, ac minor evadit. Unde, ſi contingat, eandem illam quantitatem fieri ſemper majorem, ac majorem, quemadmodum proculdubio evenit in caſu noſtro, quum a^2 minor eſt, quam b^2; tunc a quæſitæ radicis valore magis ſemper, ac magis diſceditur.

551. Et ſane in caſu, quod a^2 minor eſt, quam b^2, fiet quantitas, per repetitas operationes, minor ſemper, ac minor, ſi radix extrahatur, non jam ex $a^2 - b^2$, ſed ex $- b^2 + a^2$, ita ut incipiatur operatio a parte negativa $- b^2$. Verum, quum ſic operabitur, emerget ſeries $b\sqrt{-1} + a^2 : 2b\sqrt{-1} + a^4 : 8b^3\sqrt{-1} + a^6 : 16b^5\sqrt{-1} + 5a^8 : 128b^7\sqrt{-1} +$ &c., quæ componitur quidem ex infinitis numero terminis, ſed quiſque ejus terminus eſt quantitas ima-

imaginaria; quo fit, ut imaginaria ſit etiam ſumma omnium ejus infinitorum terminorum.

552. Sed earundem ſerierum uſum oſtendamus modo in cubicæ radicis extractione. Quem in finem proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate $a^3 + b^3$. Plane hujuſmodi radix methodo, ſuperius expoſita, nequit haberi; quum in quantitate propoſita, etſi adſint cubi partium a, & b, attamen, tam triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam, quam triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ſecundæ partis per primam, nequaquam adeſt. Quocirca quæſita radix non alia ratione in terminis finitis exprimi poterit, quam in hunc modum $\sqrt[3]{(a^3+b^3)}$.

553. Interim eodem illo artificio, quo radices cubicæ extrahuntur, poterit optata radix per ſeriem infinitorum numero terminorum exhiberi. Extrahatur enim radix cubica ex priore termino a^3; eoque deleto, dividatur terminus alter b^3 per $3a^2$, triplum quadrati inventæ radicis, & fiet quotiens $b^3 : 3a^2$ pars altera radicis inveniendæ. Subtrahatur porro ex altero illo termino, non modo triplum producti, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis a^2 per ſecundam $b^3 : 3a^2$; verum etiam, tum triplum producti, quod gignitur, multiplicando quadratum ſecundæ partis $b^6 : 9a^4$ per primam a, cum cubus ejuſdem ſecundæ partis $b^9 : 27a^6$. Et, ſubtractione iſta peracta, remanebit $- b^6 : 3a^3 - b^9 : 27a^6$.

554. Hinc, quum radix acquiſita ſit $a + b^3 : 3a^2$, capiatur triplum ſui quadrati $3a^2 + 2b^3 : a + b^6 : 3a^4$; & per priorem ejus partem

$3a^2$

$3a^4$ dividatur prior terminus illius reſidui $-b^6:$ $3a^3$: qua ratione dabit quotiens $-b^6:9a^5$ tertiam partem quæſitæ radicis. Paratis autem iiſdem productis, eorundemq; facta ſubductione, remanet adhuc $5b^9:27a^6 - b^{15}:81a^{12} - b^{18}:729a^{15}$. Quare dividatur ſimiliter prior terminus hujus reſidui $5b^9:27a^6$ per primam partem quadrati triplicati acquiſitæ radicis; & in hunc modum fiet quotiens $5b^9:81a^8$ pars quarta quæſitæ radicis. Quumq; novum adhuc oriatur reſiduum, nec unquam operatio fieri poteſt exacte; liquet, extractionem quæſitæ radicis abire in infinitum, ipſamque adeo radicem per ſeriem infinitorum numero terminorum expreſſam oriri.

555. Radix itaque cubica propoſitæ quantitatis a^3+b^3 eſt ſeries infinita $a+b^3:3a^2-b^6:9a^5+5b^9:81a^8-10b^{12}:243a^{11}+\&c.$: quæ quidem, ſicuti mutatur in $a+a:3-a:9+5a:81-10a:243+\&c.$, quum partes quantitatis propoſitæ a^3, b^3 inter ſe ſunt æquales; ſic etiam fiet $1+1:3-1:9+5:81-10:243+\&c.$, ſi earum partium unaquæque ſtatuatur æqualis unitati. Unde, quia in hypotheſi, quod tam a^3, quam b^3 adæquet unitatem, fit a^3+b^3 numerus binarius; liquet, radicem cubicam numeri binarii eſſe ſeriem infinitam $1+1:3-1:9+5:81-10:243+\&c.$

556. Eadem ratione, ſi extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate a^3-b^3; ea per regulam, ſuperius traditam, neque etiam poterit haberi; quum non adſint in propoſita quantitate partes omnes, ex quibus componitur cubus quantitatis alicujus bimembris. Unde non aliter in terminis finitis eam exprimere licebit,

quam

quam in hunc modum $\sqrt{3}\,(a^3 - b^3)$. Nihilominus, adhibita vulgari radicem cubicam extrahendi ratione, & operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda ſeries infinita $a - b^3 : 3a^2 - b^6 : 9a^5 - 5b^9 : 81a^8 - 10b^{12} : 243a^{11} + \&c.$, in qua, priore termino excepto, omnes alii ſigno $-$ afficiuntur.

VI. *Serierum infinitarum notio generalis.*

557. Qua ratione in calculo quantitatum rationalium, tum per diviſionem, cum per radicum extractionem, oriantur ſeries infinitæ; jam quidem abunde demonſtravimus. Reliquum nunc eſt, ut in ipſam ſerierum infinitarum naturam generatim inquiramus, & quæ eſſe debeant cujuſque ſeriei affectiones, paucis aperiamus. Neque enim ſatis eſt dicere, ſeries infinitas eſſe quantitates, per infinitos numero terminos expreſſas; ſed neceſſe eſt quoque, ut ipſi ſerierum termini certis quibuſdam conditionibus in infinitum progrediantur. Nam aliter ſeries nullam omnino determinationem ſubire poterunt; neque adeo in ſolutione problematum, quorſum hæc omnia tendunt, ulli nobis uſui erunt.

558. Ac primo quidem, etſi, limitatione noſtræ mentis, infinitos ſeriei terminos peragrare non liceat, neceſſe eſt tamen, ut quilibet ſeriei terminus poſſit noſtro animo ſiſti, quum de eo eſt quæſtio. Hinc prima conditio, quæ in ſeriei terminis requiritur, eſt, ut non vaga, ac indeterminata quadam ratione; ſed certa, ac præfinita lege in infinitum progrediantur. Sic enim

ſa-

ſatis erit, legem iſtam non ignorare, ut quemcumque optatum ſeriei terminum mente aſſequi valeamus. Unde nec etiam opus erit, per operationes laborioſas, & immenſo tædio plenas, ſeries ipſas continuare; ſed ſufficiet, tum legem illam, cum primum ſeriei terminum perſpectum, ac exploratum habere.

559. Uno verbo, pro ſeriebus infinitis illud idem requiritur, quod locum habet in progreſſionibus, tum geometricis, cum arithmeticis. Jam enim, cognito priore termino progreſſionis, & data quoque, ſive ratione, ſive differentia, quam progreſſionis termini ſervant inter ſe; in proclive eſt, tum progreſſionem continuare, cum quemlibet ejus terminum ſpeciatim definire. Ad eundem itaque modum cujuſque ſeriei conſtitutio talis ſit oportet, ut, dato priore ejus termino, & cognita item lege, qua termini alii in infinitum progrediuntur, poſſit nullo negotio, tum ipſa ſeries continuari, cum quilibet ejus optatus terminus adamuſſim definiri.

560. Et ſane, ſi de continuanda ſerie tantum ſit quæſtio, ſufficiet, cognitam habere relationem, quam quiſque ſeriei terminus habet ad ſuum præcedentem. Ponamus etenim, adeſſe ſeriem aliquam, in qua quilibet terminus ad eum, quem ſtatim excipit, habeat rationem compoſitam ex a ad c, & ex ſumma numerorum, utriuſq; loca oſtendentium, ad eandem ſummam, unitate auctam. Jamque, ſi primus ſeriei terminus ſtatuatur a, erit terminus ſecundus $3a^2 : 4c$, terminus tertius $15a^3 : 24c^2$, terminus quartus $105a^4 : 192c^3$, terminus quintus $945a^5 : 1920c^4$, atque ita deinceps. Sed, hac ſola relatione cogni-

gnita, optatum quemcumque ſeriei terminum non aliter licebit definire, quam ſerie ipſa uſque ad eum terminum continuata.

561. Hinc, ſi determinandus ſit aliquis ſeriei terminus independenter ab iis, qui eum præcedunt, nota etiam eſſe debet relatio, quam quilibet ſeriei terminus habet ad primum. Hanc vero ſemper definire fas erit, ubi cognita eſt relatio, quam quivis terminus habet ad ſuum præcedentem. Sic in exemplo propoſito, ſi n ſit numerus aliquis integer, & fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, una a $2n-1$, & altera a $2n$, ambæ decreſcentes intervallo binarii, uſque donec prior perveniat ad ternarium, & poſterior ad quaternarium; habebit terminus, qui occupat in ſerie locum n, ad terminum primum rationem compoſitam ex ea, quam habet a ad c, toties multiplicata, quot ſunt unitates in $n-1$, & ex ea, quam productum ex omnibus terminis primæ progreſſionis habet ad productum omnium terminorum ſecundæ progreſſionis.

562. Si ergo quæratur ſeriei illius terminus tertius, erit n numerus ternarius; adeoque progreſſionum una erit 5, 3, altera 6, 4. Unde, quum terminus tertius ad terminum primum habere debeat rationem compoſitam ex a^2 ad c^2, & ex 15 ad 24; erit terminus tertius

*Art. 560. $15a^3 : 24c^2$, prorſus ut antea *. Et ſimiliter, ſi quæratur ejuſdem ſeriei terminus quintus; erit n numerus quinarius; proindeque progreſſionum una erit 9, 7, 5, 3, altera 10, 8, 6, 4. Quare, quum terminus quintus ad terminum primum habere debeat rationem compoſitam ex a^4 ad c^4, & ex 945 ad 1920; fiet terminus quintus

tus $945a^5 : 1920c^4$, omnino ut ſupra *. *art.560.

563. Cæterum, quod non vaga, ac indeterminata quadam ratione, ſed certa, ac præfinita lege progrediuntur in infinitum termini, tam in ſeriebus, quæ per diviſionem habentur, quam in iis, quæ ab extractione radicum ſuam originem trahunt; non eſt in dubium revocandum. Jam enim quantum ad priores, notavimus ſupra*, terminos ipſarum adeo quidem ordinate in infinitum abire, ut progreſſionem conſtituant geometricam. Sed conſtanti etiam, ac invariato ordine protrahuntur in infinitum termini ſecundarum ſerierum. Etſi enim hic ordo prima facie in illis non appareat, unde nec etiam a nobis ſupra notatus; latet nihilominus in iis, & a nobis oſtendetur inferius, quum per generalem poteſtatum formulam ſeries infinitas conficere docebimus. *art.532.

564. Præterea quælibet ſeries infinita, per ſummam omnium ſuorum terminorum, exhibere nobis debet valorem alicujus quantitatis: & ipſius ſeriei uſus in eo unice ſitus ſit oportet, ut valor quantitatis, ad quam refertur, habeatur exacte, quum ſumma illa poteſt determinari; habeatur vero per approximationem, hoc eſt, colligendo ſimul, methodo vulgari, aliquot ſeriei terminos, quum eadem illa ſumma definiri minime poteſt. Quare ſecunda conditio, quæ in cujuſque ſeriei terminis requiritur, eſt, ut ii, non modo certa, ac præfinita lege in infinitum progrediantur; ſed tali quoque ratione abeant in infinitum, ut propius ſemper, ac propius accedant ad valorem quantitatis, cui ipſa ſeries correſpondet.

565. Hujuſmodi ſeries,quæ ad valores quantitatum, ad quas referuntur, propius ſemper, ac propius accedunt,dicuntur paſſim convergentes; quia nempe ad valores illos digitum intendunt, & ad eos quodammodo convergunt. Unde, ſi quæ ſint ſeries, quæ a valoribus quantitatum, quibus correſpondent, magis ſemper, ac magis removentur; eæ per contrarium divergentes ſunt appellandæ. Interim ex ſeriebus convergentibus quædam celerrime convergunt, aliæ vero adeo lente, ut quandoque mille, & amplius termini ſunt ſimul colligendi, quo quantitatum valores poſſint ſubinde per approximationem haberi, ut error non adeo ſenſibilis evadat. Unde, quum id contingit, præſtat, ſeries lentiſſime convergentes tranſmutare in alias,quæ celerrime convergant. Quod tamen qua fieri poſſit ratione, nequit hoc loco commode tradi.

566. Hac vero tranſmutatione eſt opus, quum ſumma totius ſeriei nequit reperiri: idque ea ratione, ut valor quantitatis, cui correſpondet, collectione pauciorum terminorum poſſit per approximationem haberi. Num autem ſit ſummabilis aliqua ſeries, non ita facile licet definire. Nam, problema de inveniendis ſummis finitis ſerierum, ſicuti non ſemper eſt capax ſolutionis, ſic ſummam difficultatem involuit. Plane vero non eſt hujus loci, problematis ejus ſolutionem generatim aggredi. Unde hic tantum methodis quibuſdam ſpecialibus oſtendemus, quo pacto ſpecialium quarundam ſerierum ſummæ finitæ poſſint haberi. Fiunt autem ſeries, quas hic conſiderabimus, numeris figuratis, tum primi generis, cum generum ſuperiorum.

CA-

CAPUT III.

Series ſummabiles, quæ figuratis primi generis fiunt.

567. NUmeris figuratis primi generis duę ſerierum claſſes fieri poſſunt, in quibus determinare licet ſummas finitas omnium ſuorum terminorum. Sed, priuſquam de finitis ſummis harum ſerierum agamus, ipſa res exigit, ut paucis oſtendamus, qui ſint numeri iſti, quos figuratos primi generis dicimus Et quoniam eorum conſideratio profecta eſt ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipſis Veteribus facta: proinde, qui ſint numeri multanguli, ſeu polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

I. Numeri Veterum multanguli, tum item figurati Recentiorum.

568. NUmeri multanguli, ſeu polygoni dicuntur ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium. Pro diverſitate autem hujus intervalli, variæ numerorum multangulorum ſpecies diſtinguuntur. Dicuntur enim trianguli, ſi intervallum ſit unitas; dicuntur quadrati, ſi intervallum ſit binarius; dicuntur pentagoni, ſi idem intervallum ſit ternarius; atque ita deinceps.

569. Hac ratione, ſi numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, ſint ipſi numeri

na-

naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.; erit unitas intervallum, quo numeri progrediuntur. Unde ex eorum continua collectione habebuntur omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, ſive 3 erit triangulus ſecundus; 1 + 2 + 3, ſive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

570. Quod ſi numeri, æquali intervallo ab unitate progredientes, ſint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.; erit numerus binarius intervallum, quo numeri progrediuntur. Quare ex continua illorum collectione orientur omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quadratus; 1 + 3, ſeu 4 erit quadratus ſecundus; 1 + 3 + 5, ſeu 9 quadratus tertius; atque ita continuo.

571. Sed ſi porro ſeries numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, ſit 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c.; erit numerus ternarius intervallum, quo numeri progrediuntur. Unde ex eorum continua collectione orientur omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1 + 4, ſeu 5 erit pentagonus ſecundus; 1 + 4 + 7, ſeu 12 pentagonus tertius; & ſic in infinitum.

572. Hos numeros polygonos, ſeu multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, conſideravit primus omnium Hypſicles, qui geneſim ipſorum hac definitione complexus eſt: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; ſumma omnium erit triangulus, ſi intervallum ſit unitas; quadratus, ſi binarius; pentagonus, ſi ternarius; atque ita deinceps.

573. Patet autem, in hac Hypſiclis definitione numerum angulorum deſignari per numerum, binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur. Unde Diophantus eandem illam definitionem ſic generaliter concepit: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; omnium ſumma multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario ſuperans intervallum, habet unitates.

574. Hujuſmodi porro numeri dicti ſunt a Veteribus multanguli, ſeu polygoni; quia ipſorum unitates, per æqua intervalla, in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque poſſunt numeri multanguli, ſeu polygoni, quorum unitates, æqualibus intervallis, multangulum, ſeu polygonum æquilaterum exhibent.

575. Jam, quemadmodum Veteres conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; eoſque multangulos, ſeu polygonos numeros appellarunt, quia ipſorum unitates, per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſeu polygonum æquilaterum repræſentant. Sic Recentiores, ulterius progreſſi, conſiderarunt numeros alios, qui generantur ex continua additione, tum ipſorum multangulorum, cum aliorum inde ortorum numerorum; & tam hos, quam illos figuratos appellarunt, quia unitatibus ipſorum, per æqua intervalla diſpoſi-

tis, diverſimode poſſunt configurari.

576. Hinc numeri figurati dicuntur, non modo ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verum etiam illi, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Et quo patet, numeros iſtos figuratos, non modo in varia genera diſtingui poſſe, pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores, hoc eſt ab initio aſſumpti, ab unitate progrediuntur; ſed & ipſos cujuſque generis numeros in varios ordines dividi poſſe, pro diverſa ratione, qua ex iiſdem illis genitoribus eruuntur.

577. Interim pro ſeriebus, de quibus hoc capite agendum eſt, non aliis figuratis eſt opus, quam qui ſunt generis primi, quique oriuntur a numeris, per unitatis intervallum ab unitate progredientibus. Eos autem in certos ordines ita dividemus, ut quemadmodum dicuntur genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; ita dici debeant figurati primi ordinis, qui oriuntur ex additione continua genitorum; figurati ſecundi ordis, qui producuntur per additionem continuam eorum, qui ſunt ordinis primi; figurati tertii ordinis, qui gignuntur collectione continua eorum, qui ſunt ordinis ſecundi; atque ita deinceps.

578. In primo itaque genere figuratorum, de quibus in præſentiarum eſt quæſtio, erunt genitores numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; erunt figurati primi ordinis numeri 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui additione conti-

nua

nua ipſorum genitorum producuntur; erunt figurati ſecundi ordinis numeri 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui per continuam additionem figuratorum primi ordinis generantur; erunt figurati tertii ordinis numeri 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui oriuntur collectione continua figuratorum ſecundi ordinis; atque ita in infinitum.

II. Figuratorum primi generis præclara proprietas demonſtrata.

579. NUmeris naturalibus, qui ſunt genitores figuratorum primi generis, illud accidit, ut ſi iis zero præfigatur, ſumma terminorum aliquot ſit ad ſummam terminorum totidem, maximo æqualium, in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut unitas ad binarium. Jam enim numeri naturales ſunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Plane vero, ſi iis zero præfigatur, & addantur in unum quinque termini; fiet ſumma eorum $0 + 1 + 2 + 3 + 4$, ſive etiam 10. Unde, quum ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 4, ſit 20; liquet, eam eſſe ſubduplam iſtius.

580. Simile quidpiam evenit quoque numeris figuratis, qui ex continua collectione numerorum naturalium oriuntur. Nam, ſi iis tot zero præfigantur, quot deſignat exponens ordinis ipſorum, auctus unitate una, hoc eſt duo in figuratis primi ordinis, tria in figuratis ſecundi ordinis, quatuor in figuratis tertii ordinis, atque ita deinceps; ſumma terminorum aliquot erit ad ſummam terminorum totidem, maximo æqua-

lium, ut eſt unitas ad eundem exponentem, auctum duabus unitatibus, hoc eſt, ut 1 ad 3 in figuratis ordinis primi, ut 1 ad 4 in figuratis ordinis ſecundi, ut 1 ad 5 in figuratis ordinis tertii, atque ita in infinitum.

581. Hac ratione, ſi figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. duplex zero præfigatur, & in unum addantur quinque termini; erit eorum ſumma 10, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 6, erit 30. Similiter, ſi figuratis ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. triplex zero præfigatur, & addantur in unum termini ſeptem; erit eorum ſumma 35, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 20, erit 140. Atque ita quoque, ſi figuratis tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c. quatuor zero præfigantur, addanturque ſimul termini novem; erit ſumma eorum 126, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 70, erit 630.

582. Pro hujus proprietatis demonſtratione, oſtendendum eſt prius hoc theorema. Nimirum, quod ſi fuerit ſeries quædam numerorum a, b, c, d, &c., quorum ea ſit proprietas, ut ſumma terminorum quotcumque ſit ad ultimum, toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus m, perpetuo ut unitas ad numerum n; & e, f, g, h, &c. ſit alia ſeries numerorum, qui ex illorum continua collectione oriantur: quod inquam in hac alia ſerie ſumma quotcumque terminorum eſt ad ultimum, toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ut eſt unitas ad numerum $n+1$.

583.

583. Neq;vero difficile erit, theorema iſtud oſtendere. Nam ex hypotheſi a eſt ad $(m+1)a$, ut 1 ad n; & ſimiliter in hac eadem ratione eſt quoque, non modo $a+b$ ad $(m+2)b$, verum etiam $a+b+c$ ad $(m+3)c$, & $a+b+c+d$ ad $(m+4)d$. Itaque, conjungendo ſimul, tam omnes antecedentes, quam omnes conſequentes, erit quoque, ut 1 ad n, ita $4a+3b+2c+d$ ad $(m+1)a+(m+2)b+(m+3)c+(m+4)d$; & addendo antecedentes conſequentibus, erit pariter, ut 1 ad $n+1$, ita $4a+3b+2c+d$ ad $(m+5).(a+b+c+d)$.

584. Præterea ex hypotheſi numeri e, f, g, h, &c. oriuntur ex collectione continua numerorum a, b, c, d, &c. Quare, ſicuti $a+b+c+d$ perinde valet, ac h; ita $4a+3b+2c+d$ idem erit, ac $e+f+g+h$. Oſtenſum eſt * autem, $4a+3b+2c+d$ eſſe ad $(m+5).(a+b+c+d)$, ut eſt 1 ad $n+1$. Itaque erit quoque, ut $e+f+g+h$ ad $(m+5)h$, ita 1 ad $n+1$; hoc eſt, ut ſumma quatuor terminorum e, f, g, h ad ultimum h, toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ita unitas ad numerum $n+1$. *art. 583.

585. Hoc oſtenſo theoremate, proprietas illa numerorum figuratorum ſua ſponte ſequitur. Nam numeri figurati primi ordinis oriuntur * ex additione continua numerorum naturalium. Sed horum numerorum, ut ſuperius * innuimus, ea eſt proprietas, ut ſumma terminorum aliquot ſit ad ultimum, toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitate una, veluti eſt 1 ad 2. Itaque in numeris figuratis pri- *art. 577. *art. 579.

mi ordinis ſumma terminorum quotcumque erit ad ultimum, toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, duabus unitatibus aucta, ut eſt 1 ad 3.

586. Similiter figurati ſecundi ordinis generantur * collectione continua figuratorum ordinis primi. Sed in figuratis primi ordinis oſtenſum jam eſt *, ſummam terminorum aliquot eſſe ad ultimum, toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta duabus unitatibus, veluti eſt 1 ad 3. Quare, per oſtenſum theorema, omnino neceſſe eſt, ut in figuratis ordinis ſecundi ſumma terminorum quotcumque ſit ad ultimum, toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, tribus unitatibus aucta, ut eſt 1 ad 4.

*art. 577.

*art. 585.

587. Eadem ratione gradatim eruere licebit ex oſtenſo theoremate proprietates figuratorum aliorum ordinum. Nec reticebimus, quod exinde colligi quoque poteſt ipſa numerorum naturalium proprietas. Oriuntur ſiquidem numeri naturales ex continua collectione unitatum. Plane vero in ſerie unitatum ſumma terminorum aliquot eſt ad ultimum, toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitate nulla, in ratione æqualitatis, hoc eſt, ut 1 ad 1. Quare, vi oſtenſi theorematis, in numeris naturalibus ſumma quotcumque terminorum erit ad ultimum, toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitate una, in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2.

588. Cæterum in numeris naturalibus memorata proprietas pendet ex theoremate iſto, nulli non cognito, quod ſumma quotcumque ter-

terminorum cujuſque progreſſionis arithmeticæ habetur, ſi ſumma extremorum multiplicetur per multitudinem terminorum dimidiatam. Hinc enim ſequitur, eandem ſummam terminorum ſubduplam eſſe ſummæ extremorum, acceptæ toties, quota eſt ipſa terminorum multitudo: proindeque, quia numeri naturales conſtituunt progreſſionem arithmeticam, & quum ii incipiunt a zero, ſumma extremorum eſt ipſe maximus terminus; omnino neceſſe eſt, ut ſumma quotcumque numerorum naturalium, a zero incipientium, ſubdupla ſit ſummæ terminorum totidem, maximo æqualium.

589. Perſpicuum eſt autem, proprietatem iſtam numeris naturalibus non alia ratione competere, quam quia conſtituunt progreſſionem arithmeticam, cujus prior terminus eſt zero, ſeu nihil. Unde, ſi qui ſint alii numeri, qui ſimiliter a zero incipientes, progreſſionem conſtituant arithmeticam; eos eandem prorſus proprietatem habere, non eſt in dubium revocandum: proindeque theorema enunciari poteſt generaliter in hunc modum, quod ſumma quotcumque terminorum cujuſvis progreſſionis arithmeticæ, a zero inchoatæ, eſt ſubdupla ſummæ terminorum totidem, maximo æqualium. Sic ſumma iſtorum terminorum 0, 2, 4, 6, 8 eſt 20, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 8, eſt 40. Pariterque ſumma horum terminorum 0, 3, 6, 9, 12 eſt 30, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 12, eſt 60.

III. Ratio colligendi, tum figuratos, cum poteſtates numerorum naturalium.

590. MEdiante ea proprietate figuratorum, quam modo oſtenſam exhibuimus, facile erit, eorundem quotcumque terminos in unam ſummam colligere, atque ita ſtatim exhibere in quolibet figuratorum ordine eum, quem libuerit, terminum. Et ut ab ipſis figuratorum genitoribus ordiamur, proponantur in unum colligendi tot numerorum naturalium termini, quot deſignat numerus *m*. Jam ultimus, ſeu maximus terminus eſt ipſe numerus *m*, ſive *m* : 1. Sed, præfixo numeris iſtis unico zero, ſumma quotcumque terminorum
*art. 579. fit ſubdupla * ſummæ terminorum totidem, maximo æqualium. Quare, ſi maximus ille terminus ſumatur toties, quot deſignat *m* + 1, & producti inde orti capiatur ſemiſſis; fiet ſumma quæſita productum ex *m* : 1 in (*m* + 1) : 2.

591. Proponantur ſecundo in unam ſummam colligendi termini totidem figuratorum primi ordinis, quot deſignat idem numerus *m*.
*art. 577. Quoniam figurati primi ordinis oriuntur * ex additione continua numerorum naturalium;
*art. 590. erit * ultimus, ſeu maximus terminus factum ex *m* : 1 in (*m* + 1) : 2. Jam vero in figuratis primi ordinis, ſi duplex iis zero præfigatur, ſum-
*art. 580. ma terminorum aliquot * fit ſubtripla ſumma terminorum totidem, maximo æqualium. Itaque ſi maximus ille terminus toties capiatur, quot unitates continet *m* + 2, & producti inde orti ſumatur triens; fiet ſumma quæſita productum

ex

ex $m:1$ in $(m+1):2$ in $(m+2):3$.

592. Proponantur tertio in unum addendi tot termini figuratorum ordinis ſecundi, quot deſignat idem adhuc numerus m. Quoniam figurati ſecundi ordinis oriuntur * ex continua * *art.* 577. collectione figuratorum ordinis primi ; erit * * *art.* 591. ultimus, ſeu maximus terminus factum ex $m:1$ in $(m+1):2$ in $(m+2):3$. Sed in figuratis ſecundi ordinis, ſi triplex iis zero præfigatur, ſumma quotcumque terminorum fit * ſub- * *art.* 580. quadrupla ſummæ terminorum totidem, æqualium maximo. Quare, ſi maximus ille terminus toties accipiatur, quot unitates continet $m+3$, & producti inde orti quadrans capiatur; fiet ſumma quæſita productum ex $m:1$ in $(m+1):2$ in $(m+2):3$ in $(m+3):4$.

593. Non diſſimili ratione colligi poterunt in unam ſummam termini quotcumque figuratorum ordinum ſuperiorum. Sed perſpicuum eſt, ad eas ſummas inveniendas, poſſe generaliter hanc regulam adhiberi. Nimirum fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum; una quidem a multitudine terminorum, in unam ſummam colligendorum, altera ab unitate ; & utraque tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Multiplicentur deinde inter ſe mutuo, tam termini prioris progreſſionis, quam termini ſecundæ. Jamque, diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, fiet quotiens hujus diviſionis terminorum ſumma quæſita.

594. Ita ſi m ſit numerus terminorum, quos oportet in unam ſummam colligere; erit m, $m+$

1, m

1 , $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, &c. prior progreſſio arithmetica ; & 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , &c. progreſſio altera . Unde , ſi quæſtio ſit de ipſis figuratorum genitoribus , qui nullum ordinem conſtituentes , zero habent pro ſuo exponente ; fiet ſumma quæſita $(m^2 + m) : 2$. Quod ſi vero agatur de figuratis primi ordinis , quorum exponens eſt 1 ; erit ſumma $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$. Atque ita quoque eadem ſumma erit $(m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m) : 24$, ſi figurati ſint ſecundi ordinis ; erit $(m^5 + 10m^4 + 35m^3 + 50m^2 + 24m) : 120$, ſi figurati ſint ordinis tertii ; ſicque deinceps.

595. Quod ſi numerus m ſtatuatur infinitus ; tunc omnes poteſtates inferiores ipſius m ſunt velut infiniteſimæ , atque adeo evaneſcent * relate ad maximam poteſtatem ejuſdem numeri m . Unde ſumma quæſita erit $m^2 : 2$ in numeris naturalibus , $m^3 : 6$ in figuratis primi ordinis, $m^4 : 24$ in figuratis ordinis ſecundi, $m^5 : 120$ in figuratis ordinis tertii , atque ita de aliis . Et quoniam figurati cujuſque ordinis oriuntur * ex collectione continua figuratorum ordinis præcedentis ; omnino neceſſe eſt , ut ſumma infinitorum terminorum ad ſummam terminorum totidem , æqualium maximo, ſit , ut 1 ad 2 in numeris naturalibus , ut 1 ad 3 in ſiguratis primi ordinis , ut 1 ad 4 in figuratis ſecundi ordinis, ut 1 ad 5 in figuratis tertii ordinis , atque ita deinceps.

* art. 447.

* art. 577.

596. Mediantibus ſummis numerorum figuratorum, determinari quoque poſſunt ſummæ poteſtatum , quæ fiunt ex numeris naturalibus. Et quantum ad primas poteſtates numerorum

na-

naturalium, eæ ab ipſis numeris naturalibus non differunt; quum prima poteſtas cujuſque quantitatis ſit * ipſa quantitas ſemel poſita. Quare, ad inveniendam ſummam primarum poteſtatum numerorum naturalium; ſatis erit, ipſos numeros naturales in unam ſummam colligere: proindeque, ſi quilibet numerus naturalis deſignetur per m, erit $(m^2 + m) : 2$ ſumma omnium m; nam hæc eadem quantitas inventa eſt paulo ante* pro ſumma numerorum totidem naturalium, quot deſignat numerus m. *art. 77. *art. 590. 594.

597. Proponatur ſecundo invenienda ſumma quadratorum. Et jam, ſi m referat indefinite quemcumque numerum naturalem; deſignabit * etiam indefinite $(m^2 + m) : 2$ quemcumque numerum figuratum ordinis primi. Sed ſumma indefinita omnium figuratorum primi ordinis eſt * $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$. Itaque hæc eadem quantitas erit ſumma omnium $(m^2 + m) : 2$; & conſequenter illa eadem duplicata, erit ſumma omnium $m^2 + m$. Jam vero ſumma omnium m eſt * $(m^2 + m) : 2$. Quare, ſi ex quantitate illa duplicata hæc alia ſubducatur, fiet reſiduum $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$ ſumma omnium quadratorum m^2. *art. 577. 590. *art. 591. 594. *art. 596.

598. Proponatur tertio invenienda ſumma cuborum. Quoniam m refert indefinite quemcumque numerum naturalem; deſignabit * etiam indefinite $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$ quemcumque numerum figuratum ordinis ſecundi. Sed ſumma indefinita figuratorum ſecundi ordinis eſt * $(m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m) : 24$. Itaque hæc eadem quantitas erit ſumma omnium $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$; & conſequenter illa ea- *art. 577. 591. *art. 592. 594.

dem

dem ſextuplicata erit ſumma omnium $m^3 + 3m^2 + 2m$. Et quoniam ſumma omnium m inventa

*art.596. * eſt $(m^2 + m):2$, erit ſumma omnium $2m$ æqualis $m^2 + m$. Pariterque, quia ſumma omnium

*art.597. m^2 inventa * eſt $(2m^3 + 3m^2 + m):6$, erit ſumma omnium $3m^2$ æqualis $(2m^3 + 3m^2 + m):2$. Quare, ſi ex quantitate illa ſextuplicata hæ aliæ duæ ſubducantur, fiet reſiduum $(m^4 + 2m^3 + m^2):4$ ſumma omnium m^3.

599. Non diſſimili methodo ad altiores gradatim poteſtates pergere licet, earumque ſummas determinare ex definitis ſummis figuratorum ordinum ſuperiorum. Sed nolo hic reticere, quod, ſicuti ſumma indefinita numero-

*art.595. rum naturalium $(m^2 + m):2$ eſt * tantum $m^2:2$, quum numerus m ponitur infinitus; ſic in eadem hypotheſi ſumma indefinita omnium quadratorum $(2m^3 + 3m^2 + m):6$ erit tantum $m^3:3$. Unde, ſicuti ſumma numerorum omnium naturalium eſt ad ſummam totidem, maximo æqualium, in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2; ita ſumma omnium quadratorum erit ad ſummam totidem, maximo æqualium, in ratione ſubtripla, nimirum, ut 1 ad 3.

*art.598. 600. Similiter autem, quia * ſumma indefinita cuborum eſt $(m^4 + 2m^3 + m^2):4$; hæc erit tantum $m^4:4$, quum numerus m ponitur infinitus: proindeque ſumma omnium cuborum erit ad ſummam totidem, maximo æqualium, ut 1 ad 4, hoc eſt in ratione ſubquadrupla. Atque ita quoque, ſi poteſtatum altiorum ſummæ indefinitæ, tradita methodo, determinentur; invenietur, ſummam ex omnibus quadrato-quadratis eſſe ad ſummam totidem, æqualium maximo, ut

1 ad

1 ad 5; & ſummam ex omnibus quadrato-cubis, ut 1 ad 6; & ſummam ex omnibus cubo-cubis, ut 1 ad 7; atque ita deinceps.

601. Cæterum, quum ſumma indefinita quadratorum * ſit $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$, & ſumma indefinita figuratorum primi ordinis * ſit $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$; erit prior ſumma ad ſecundam, ut $2m^2 + 3m + 1$ ad $m^2 + 3m + 2$. Quumque in hypotheſi, quod m ſit numerus infinitus, hæc ratio fiat æqualis ei, quam habet $2m^2$ ad m^2, ſive 2 ad 1; liquet, ſummam omnium quadratorum ad ſummam omnium figuratorum primi ordinis eſſe pariter, ut 2 ad 1. Eodem argumento oſtendemus, ſummam omnium cuborum ad ſummam omnium figuratorum tertii ordinis eſſe, ut 6 ad 1. Nec diſſimiliter determinare licebit proportiones inter poteſtates altiores, & figuratos ordinum ſuperiorum. *art. 596. *art. 111.

IV. *Theorematum præcedentium ad figuras geometricas applicatio.*

602. Quod mox * oſtenſum eſt de ratione ſubdupla, quam habet ſumma omnium numerorum naturalium ad ſummam terminorum totidem, æqualium maximo, uſui nobis eſſe poteſt, pro oſtendendo geometrico illo theoremate, quod triangulum eſt ſemiſſis parallelogrammi, eandem cum ipſo baſim, & altitudinem habentis. Eſto enim triangulum aliquod ABC. Jamque, ſi ejus latus AB dividatur in partes æquales A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, &c., & ducantur per puncta diviſionum rectæ *da*, *bb*, *cc*, *dd*, &c., parallelæ lateri BC; fient portioni- *art. 595. FIG. 7.

bus

bus *Aa*, *Ab*, A*c*, A*d*, &c. proportionales parallelæ iſtæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c.; quum harum unaquæque ad portionem, ei correſpondentem, ſit in conſtanti illa ratione, quam habet BC ad AB.

603. Hinc, ſicuti portiones A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c. poſſunt numeros naturales, ab unitate ſe conſequentes, nobis repræſentare; ſic eoſdem numeros exhibere quoque licebit per parallelas *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c., quæ portionibus iis proportione correſpondent. Augeatur jam numerus particularum æqualium A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, &c. in infinitum, faciendo, ut eæ particulæ ſint indefinitæ parvitatis. Et parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c., continuatæ ad latus uſque BC, quum infinitæ etiam numero fiant, omnes omnino numeros naturales nobis exhibebunt. Quare ſumma omnium illarum parallelarum erit ad ſummam totidem aliarum, æqualium maximæ BC, in ratione ſubdupla.

604. Compleatur porro parallelogrammum ABCD. Et ſiquidem producantur omnes illæ parallelæ, uſque donec occurrant lateri CD; fiet unaquæque illarum ſic producta æqualis ipſi BC. Unde ſumma omnium parallelarum, quæ continentur in triangulo ABC, ad ſummam omnium parallelarum, quæ continentur in parallelogrammo ABCD, erit in ratione ſubdupla. Sed per haſce parallelas trianguli, & parallelogrammi areæ quodammodo nobis exhibentur: Quare triangulum ABC ad parallelogrammum ABCD ſubduplam quoque rationem habebit: & propterea unum erit ſemiſſis alterius.

605. Quemadmodum autem in triangulo ABC parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. exhibere nobis

bis poſſunt numeros omnes naturales, ab unitate ſe conſequentes, quia proportione correſpondent portionibus A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c.; ita, ſi figura ABC talis ſtatuatur, ut parallelæ illæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. ſint in duplicata ratione earundem portionum A*a*, A*b*, A*c*, A*d*; tunc per eaſdem parallelas exhiberi poterunt quadrata numerorum naturalium, ab unitate ſe conſequentium. Unde, ob alterum illud theorema, quod ſumma omnium quadratorum eſt * ad ſummam terminorum totidem, æqualium maximo, in ratione ſubtripla, demonſtrare licebit, figuram ABC eſſe tertiam partem parallelogrammi ABCD. FIG. 8. *art. 599.

606. Sed, nihil vetat, figuram ABC talis naturæ concipere, ut parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. ſint in triplicata ratione portionum, ipſis correſpondentium, A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c. Et in iſto caſu eædem illæ parallelæ exhibere nobis poterunt cubos numerorum naturalium, ab unitate ſe conſequentium. Unde, vi ejus theorematis, quod ſumma omnium cuborum eſt * ad ſummam terminorum totidem, æqualium maximo, in ratione ſubquadrupla; concludere fas erit, figuram ABC eſſe quartam partem parallelogrammi ABCD. Et ad eundem modum licebit, concipere figuram ABC ejus indolis, ut parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. referant numerorum naturalium poteſtates altiores; & per theoremata, eis correſpondentia, definire rationem, quam figura ABC habet ad parallelogrammum ABCD. *art. 600.

607. Cæterum, cujus indolis ſint figuræ iſtæ, in quibus parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. referunt, non jam numeros naturales, ab unitate ſe

con-

conſequentes, ſed numerorum naturalium poteſtates; non eſt hujus loci definire. Hic potius præſtat, nonnihil inquirere in methodum, qua tum ad triangulum, cum ad hujuſmodi figuras tranſtulimus theoremata, ſuperius oſtenſa. Videtur enim, id præſtitum a nobis eſſe, ſupponendo aream, tam trianguli, quam earum figurarum componi ex iis parallelis: quæ ſane hypotheſis omnino abhorret a vero. Nam, ut ſuperius * dictum eſt, etſi oriatur, & linea ex motu puncti, & ſuperficies ex motu lineæ, & ſolidum ex motu ſuperficiei; attamen, nec linea ex punctis, nec ex lineis ſuperficies, nec denique ſolidum ex ſuperficiebus componitur.

* Art. 440.

608. Et ſane vulgata indiviſibilium methodus, quum primum lucem adſpexit, vel hac ſola ratione quamplures Geometrarum offendit, quod pro unaquaque quantitate indiviſibilia quædam componentia aſſumebat. Verum in methodi hujus applicatione aliud etiam adhibebatur, quod corrigebat hypotheſim eorum indiviſibilium, & omnino eam ad verum revocabat. Nam in cujuſque quantitatis compoſitione, non modo ad indiviſibilia illa, verum etiam ad eorundem intervalla oportebat attendere: quo fiebat, ut vera quantitatum componentia eſſent cognomines illæ quantitates, quæ ex iis indiviſibilibus, per ſua reſpective intervalla latis, orirentur; atque adeo, ut linea ex aliis lineolis, ſuperficies ex aliis exiguis ſuperficieibus, & corpus demum ex aliis corpuſculis componeretur.

609. Ad eundem itaque modum in caſu noſtro, ultro quidem concedimus, figuræ planæ ABC componentia, non eſſe parallelas *aa*, *bb*,

FIG. 7. 8.

cc,

cc, *dd*, &c., ſed ſpatiola A*aa*, *abba*, *bccb*, *cddc*, &c. Verum, ſicuti, ob portiones indefinite parvas A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, &c., ſpatiola illa conſiderari poſſunt, velut totidem exigua parallelogramma; ita, ob æqualitatem earundem portionum, parallelogrammis hiſce proportionales fiunt parallelæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. Unde non veriti fuimus, habere figuram ABC, velut ſummam earum parallelarum; & parallelogrammum ABCD, velut ſummam parallelarum totidem, æqualium maximæ BC: quia nempe, ob portiones A*a*, *ab*, *bc*, *cd*, &c. indefinite parvas, & æquales, figura ABC, & parallelogrammum ABCD ſummis iis proportione correſpondent.

610. Hinc autem diſcimus generaliter, duas quaſvis ſuperficies haberi poſſe, veluti ſummas infinitarum parallelarum, in iis ductarum; quotieſcumque intervalla, quibus eæ parallelæ a ſe invicem diſtant, in utraque figura ſunt æqualia, ac indefinite parva. Sed eodem argumento duo quævis ſolida haberi poterunt, veluti ſummæ infinitarum ſuperficierum æquidiſtantium, in iis ductarum; ubi intervalla, per quæ diſtant a ſe mutuo in utroque ſolido eæ ſuperficies, ſunt indefinitæ parvitatis, & ejuſdem magnitudinis. Nam profecto, ſicuti in primo caſu proportionales fiunt iis parallelis exiguæ ſuperficies, quæ inter eaſdem continentur; ſic in ſecundo caſu ſuperficiebus iis æquidiſtantibus proportione correſpondebunt exigua ſolida, quæ inter eaſdem ſuperficies jacent.

611. Id vero quum ita ſit, ope ejus theorematis, quod ſumma quadratorum ex numeris omnibus naturalibus eſt * ad ſummam terminorum *art. 595.

totidem, æqualium maximo, in ratione ſubtripla; nullo negotio demonſtrare licebit, eſſe pariter in ratione ſubtripla, tam pyramidem, & priſma, quam conum, & cylindrum, quorum eadem eſt baſis, & eadem altitudo. Nam, diviſa altitudine in portiones æquales, & indefinite parvas, ductiſque intra conum, & pyramidem per puncta diviſionum planis totidem, baſi parallelis; poterunt plana iſta quadrata numerorum naturalium nobis exhibere. Unde, quia, productis iiſdem planis uſque ad ſuperficiem priſmatis, & cylindri, fit eorum unumquodque æquale maximo plano, quod eſt baſis ipſa; vi ejus theorematis omnino neceſſe eſt, ut tertia pars ſit, tam conus ipſius cylindri, quam pyramis ipſius priſmatis.

V. Primo claſſis ſerierum ſummabilium, quæ figuratis primi generis fiunt.

612. Figuratis primi generis, ut ab initio *hujus capitis innuimus, duæ
*art. 567. ſerierum claſſes fieri poſſunt, in quibus determinare licet ſummas finitas omnium ſuorum terminorum. Prima claſſis complectitur ſeries illas, quæ oriuntur, multiplicando ordine ipſos numeros figuratos per terminos alicujus progreſſionis geometricæ decreſcentis. Secunda vero claſſis comprehendit eas ſeries, quæ oriuntur ex inverſione eorundem figuratorum, hoc eſt, quum evadunt denominatores fractionum totidem, habentium unitatem pro ſuis numeratoribus. Utriuſque claſſis ſeries ſingularem quandam methodum nobis ſuppeditant, pro determinandis ſummis finitis ſerierum infinitarum.

613.

613. Ut ergo a ſeriebus, quæ ad primam claſſem referuntur, ordiamur; jam illud ſuperius * oſtenſum eſt, quod ſi progreſſio aliqua geometrica decreſcat in ea ratione, quam habet n ad 1, & ſit a primus terminus talis progreſſionis, debet eſſe $na : (n - 1)$ ſumma omnium ſuorum terminorum. Jam numeri naturales, qui ſunt genitores figuratorum primi generis, ut alibi * etiam dictum eſt, oriuntur ex continua collectione unitatum. Unde, ſi ipſis figuratorum ordinibus apponamus, tum ſeriem numerorum naturalium, cum ſeriem unitatum; illud primo loco ſtatui poteſt, quod ſi termini, conſtituentes ſeriem unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c., multiplicentur ordine per terminos progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a:n, a:n^2, a:n^3, a:n^4$, &c., ſumma ſeriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c, ſit $na : (n - 1)$.

* art. 532.

* art. 537

614. Multiplicentur nunc ſecundo termini, conſtituentes ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c., ordine per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a:n, a:n^2, a:n^3, a:n^4$, &c. Dico, ſummam ſeriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 +$ &c. eſſe $n^2a : (n - 1)^2$. Reſolvatur enim quiſque terminus ejus ſeriei in plures alios, quorum coefficientes ſint unitates, ex quibus componitur coefficiens illius. Jamque, reſolutione iſta, habebuntur infinitæ aliæ ſeries, quarum una erit $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c., ſecunda $1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c., tertia $1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c., quarta $1a : n^3$

$+ 1a : n^4 +$ &c., quinta $1a : n^4 +$ &c., atque ita deinceps.

615. Iſtarum porro ſerierum quælibet ad primam eſt in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius. Unde, ſicuti ſumma prioris ſeriei eſt * $na : (n - 1)$, ſic erit $a : (n - 1)$ ſumma ſecundæ ſeriei, $a : n(n - 1)$ ſumma ſeriei tertiæ, $a : n^2 (n - 1)$ ſumma ſeriei quartæ, $a : n^3 (n - 1)$ ſumma ſeriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque ſeries, de qua agitur, $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 +$ &c. æqualis erit alteri huic ſeriei $na : (n - 1) + a : (n - 1) + a : n(n - 1) + a : n^2 (n - 1) + a : n^3 (n - 1) +$ &c. Sed altera hæc ſeries eſt ad ſeriem $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c. in ea ratione, quam habet n ad $n - 1$. Quare, ſicuti ſumma iſtius eſt * $na : (n - 1)$, ſic ſumma illius erit $n^2 a : (n - 1)^2$: & propterea etiam $n^2 a : (n - 1)^2$ erit ſumma ſeriei principalis $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 +$ &c.

*art. 613.

*art. 613.

616. Multiplicentur tertio termini, conſtituentes ſeriem figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c., ordine per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c. Dico, ſummam ſeriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 +$ &c. eſſe $n^3 a : (n - 1)^3$. Reſolvatur enim quiſque terminus ejus ſeriei in plures alios, quorum coefficientes ſint numeri naturales, ex quibus componitur coefficiens illius. Jamque, reſolutione iſta, habebuntur infinitæ aliæ ſeries, quarum prima erit $1a +$

1a:

$1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c., ſecunda $2a : n + 2a : n^2 + 2a : n^3 + 2a : n^4 +$ &c., tertia $3a : n^2 + 3a : n^3 + 3a : n^4 +$ &c.. quarta $4a : n^3 + 4a : n^4 +$ &c., quinta $5a : n^4 +$ &c., atque ita deinceps.

617. Iſtarum autem ſerierum quælibet ad primam eſt in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius. Unde, ſicuti ſumma prioris ſeriei eſt * $na : (n - 1)$, *art. 613. ſic erit $2a : (n - 1)$ ſumma ſecundæ ſeriei, $3a : n(n - 1)$ ſumma ſeriei tertiæ, $4a : n^2 (n - 1)$ ſumma ſeriei quartæ, $5a : n^3 (n - 1)$ ſumma ſeriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque ſeries, de qua agitur, $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 +$ &c. æqualis erit alteri huic ſeriei $na : (n - 1) + 2a : (n - 1) + 3a : n(n - 1) + 4a : n^2 (n - 1) + 5a : n^3 (n - 1) +$ &c. Sed altera hæc ſeries eſt ad ſeriem $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 +$ &c. in ea ratione, quam habet n ad $n - 1$. Quare, ſicuti ſumma iſtius eſt * $n^2 a : (n - 1)^2$, *art. 614. ſic ſumma illius erit $n^3 a : (n - 1)^3$: & propterea etiam $n^3 a : (n - 1)^3$ erit ſumma ſeriei principalis $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 +$ &c.

618. Multiplicentur quattro termini, conſtituentes ſeriem figuratorum ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, &c., ordine per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ decreſcentis a, $a : n$, $a : n^2$, $a : n^3$, $a : n^4$, &c. Dico, ſummam ſeriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 4a : n + 10a : n^2 + 20a : n^3 + 35a : n^4 +$ &c. eſſe $n^4 a : (n - 1)^4$. Reſolvatur enim quiſque terminus ejus ſeriei in plures alios, quorum coefficientes ſint figurati

primi ordinis, ex quibus componitur coefficiens illius. Jamque, reſolutione iſta, habebuntur infinitæ aliæ ſeries, quarum prima erit $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 +$ &c., ſecunda $3a : n + 3a : n^2 + 3a : n^3 + 3a : n^4 +$ &c., tertia $6a : n^2 + 6a : n^3 + 6a : n^4 +$ &c., quarta $10a : n^3 + 10a : n^4 +$ &c., quinta $15a : n^4 +$ &c., atque ita deinceps.

619. Iſtarum vero ſerierum quælibet ad primam eſt in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius.
*art.613. Unde, ſicuti ſumma prioris ſeriei eſt * $na : (n-1)$, ſic erit $3a : (n-1)$ ſumma ſecundæ ſeriei, $6a : n(n-1)$ ſumma ſeriei tertiæ, $10a : n^2(n-1)$ ſumma ſeriei quartæ, $15a : n^3(n-1)$ ſumma ſeriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque ſeries, de qua agitur, $1a + 4a : n + 10a : n^2 + 20a : n^3 + 35a : n^4 +$ &c. æqualis erit alteri huic ſeriei $na : (n-1) + 3a : (n-1) + 6a : n(n-1) + 10a : n^2(n-1) + 15a : n^3(n-1) +$ &c. Sed altera hæc ſeries eſt ad ſeriem $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 +$ &c. in ea ratione, quam habet n ad $n-1$. Quare, ſicuti ſumma
*art.616. iſtius eſt * $n^3a : (n-1)^3$, ſic ſumma illius erit $n^4a : (n-1)^4$: & propterea etiam $n^4a : (n-1)^4$ erit ſumma ſeriei principalis $1a + 4a : n + 10a : n^2 + 20a : n^3 + 35a : n^4 +$ &c.

620. Eodem artificio invenire licebit ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet ſeriei, quæ oriatur, multiplicando ordine numeros figuratos ordinis ſuperioris per terminos progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c. Nimirum, reſolvendo unum-

quem-

quemq; terminum illius ſeriei in plures alios, quorum coefficientes ſint numeri figurati ordinis præcedentis, ex quibus componitur termini illius coefficiens; & conſtituendo infinitas alias ſeries, quarum termini geometricam progreſſionem decreſcentem conſtituant. Nam, ſi ſummæ harum ſerierum inveniantur, & ex iis fiat nova ſeries; hæc ad ſeriem, ortam ex numeris figuratis ordinis præcedentis, erit perpetuo, ut n ad $n - 1$. Quare, ex cognita ſumma iſtius ſeriei, facile erit, illius quoque ſummam invenire.

621. Sed ex iis, quæ hactenus oſtenſa ſunt,
haud difficile erit, regulam cudere adeo generalem, quæ ad omnes caſus, ſpeciales ſe extendat
Quemadmodum enim termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 +$ &c., ubi afficiuntur unitatibus
1, 1, 1, 1, 1, &c., dant * ſimul collecti ſummam *art. 613.
$na : (n - 1)$; ita ſumma eorundem fit * $n^2a : $ *art. 614.
$(n - 1)^2$, quum afficiuntur numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, &c.; $n^3a : (n - 1)^3$ *, quum *art. 616.
afficiuntur figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10,
15, &c.; $n^4a : (n - 1)^4$ *, quum afficiuntur *art. 618.
figuratis ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, &c.; atque ita deinceps. Quare, ſi ipſi numeri naturales ita quidem inter figuratorum ordines collocentur, ut exponens ordinis eorum ſit zero, ſeu nihil; regula generalis hæc erit.

622. Inveniatur ſumma omnium terminorum progreſſionis geometricæ decreſcentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 +$ &c., quum quiſque terminus afficitur unitate. Et quantitas, quæ eſt ad hanc ſummam in ratione, quam habet n ad $n - 1$, toties multiplicata, quot deſignat ex-

ponens ordinis numerorum, auctus unitate una, erit ſumma quæſita. Qua ratione, ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 +$ &c. afficiantur figuratis ſexti ordinis, ſumma erit $n^8 a : (n - 1)^8$. Nam ſumma omnium ejus infinitorum terminorum, quum quiſque afficitur unitate, eſt * $na : (n - 1)$. Plane vero quantitas, quæ ſit ad $na : (n - 1)$ in eadem illa ratione, quam habet n^7 ad $(n - 1)^7$, eſt $n^8 a : (n - 1)^8$.

*art. 613.

VI. *Secunda claſſis ſerierum ſummabilium, quæ figuratis primi generis fiunt.*

623. Quantum ad ſeries infinitas alterius claſſis, hoc eſt ad eas, quæ oriuntur per inverſionem numerorum figuratorum; etiam determinare licebit earum ſummas finitas. Eſt autem hujus rei hoc quidem theorema generale: nimirum, quod in numeris figuratis inverſis ſumma omnium terminorum, qui primum excipiunt, adæquat eam partem unitatis, quam deſignat exponens ipſe ordinis numerorum; hoc eſt unitatem integram, quum figurati ſunt primi ordinis; unitatis ſemiſſem, quum figurati ſunt ordinis ſecundi; unitatis trientem, quum figurati ſunt ordinis tertii; atque ita deinceps. Nec ſane difficile erit, theorematis hujus veritatem oſtendere.

624. Invertantur etenim primo numeri figurati primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c., ita, ut fiat ſeries $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 +$ &c. Oſtendendum eſt, ſummam omnium terminorum hujus ſeriei, excepto primo, unita-

ta-

tatem adæquare. Fiat ſeries harmonica ex numeris naturalibus inverſis 1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + &c. Et jam, ſi ab ea ſubducatur ipſamet, multata primo termino; reſiduum erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Plane vero, ſi ſubtractio fiat ea lege, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius; emergit hæc alia ſeries 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + &c., cujus duplum eſt ſeries, de qua agitur 1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + &c. Itaque ſumma hujus ſeriei æqualis erit duplo unitatis: & propterea, dempto priore termino, qui ſupererunt, unitatem ipſam adæquabunt.

625. Invertantur ſecundo numeri figurati ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, &c., ita, ut fiat ſeries 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + &c. Oſtendendum eſt modo, terminos omnes hujus ſeriei, excepto primo, unitatis ſemiſſem adæquare. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum ordinis primi 1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + &c. Et, ſiquidem ab ea ſubducatur ipſamet, multata primo termino; reſiduum erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Jam vero, ſi ſubtractio ea lege inſtituatur, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius; naſcitur hæc alia ſeries 2 : 3 + 3 : 18 + 4 : 60 + 5 : 150 + 6 : 315 + &c., cujus termini ad terminos ſeriei, de qua eſt quæſtio, 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + &c., ſunt ut 2 ad 3. Itaque, quum valor illius ſeriei ſit unitas, erit valor alterius hujus ſeriei 3 : 2 : proindeque, dempto priore termino, qui remanebunt, ſemiſſem unitatis adæquabunt.

626.

626. Invertantur tertio numeri figurati tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, &c., ita, ut fiat ſeries 1 : 1 + 1 : 5 + 1 : 15 + 1 : 35 + 1 : 70 + &c. Dico, omnes terminos hujus ſeriei, excepto primo, trientem unitatis adæquare. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum ſecundi ordinis 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + &c. Et, ſiquidem ab ea ſubducatur ipſamet, multata primo termino; id, quod remanebit, erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Sed, ſi ſubtractio ea lege fiat, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius; gignitur hæc alia ſeries 3 : 4 + 6 : 40 + 10 : 200 + 15 : 700 + 21 : 1760 + &c., cujus termini ad terminos ſeriei, de qua agitur, 1 : 1 + 1 : 5 + 1 : 15 + 1 : 35 + 1 : 70 + &c., ſunt, ut 3 ad 4. Itaque, quum valor *illius* ſeriei ſit unitas, neceſſe eſt, ut valor alterius *hujus* ſeriei ſit 4 : 3 : & propterea, dempto priore termino, qui ſupererunt, trientem unitatis adæquabunt.

627. Non diſſimiliter veritatem propoſiti theorematis oſtendemus, invertendo numeros figuratos ordinum ſuperiorum. Sed, ſi ipſi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum ſubinde collocentur, ut exponens ordinis eorum ſit zero, ſeu nihil; poterit idem theorema iis etiam numeris applicari. Invertantur etenim numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., & conſtituatur eorum inverſione ſeries harmonica 1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + &c. Dico, omnes terminos hujus ſeriei, qui primum excipiunt, ſimul collectos, eam unitatis partem adæquare, quam deſignabit zero, ſeu nihil, hoc

eſt exponens ordinis numerorum naturalium; adeoque ſummam illorum eſſe infinitam, quum dividendo finitum per zero oriatur * infinitum. *art.486.

628. Id autem, velut prorſus memorabile, dupliciter oſtendemus. Et primo quidem in hunc modum. Fiat ſeries ex inverſione figuratorum primi ordinis 1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + &c. Et quoniam omnes termini, qui primum excipiunt, adæquant * unitatem; *art.624.
erit tota ſeries æqualis binario, adeoque dimidium ejuſdem ſeriei unitatem rurſus adæquabit. Capiatur autem dimidium illius ſeriei, ſumendo ſemiſſem cujuſque termini. Et jam orietur nova ſeries 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + &c., quæ conſiderari poterit, velut generatrix ſeriei harmonicæ 1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + &c.. Nam, quemadmodum tota illa ſeries dat primum terminum iſtius; ita ex eadem, multata primo termino, orietur iſtius terminus ſecundus; ex eadem, multata duobus primis terminis, orietur iſtius terminus tertius; atque ita deinceps.

629. Hinc, ſi ſeriei illius 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + &c. quiſque terminus capiatur toties, quotus eſt locus, quem ipſe occupat in ſerie; ipſa ſeries harmonica debet oriri. Id vero quum fit, oritur ſeries 1 : 2 + 2 : 6 + 3 : 12 + 4 : 20 + 5 : 30 + &c., quæ, reductis terminis omnibus ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, mutatur in hanc aliam 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + 1 : 6 + &c., ſcilicet in ipſam ſeriem harmonicam, primo termino multatam. Itaque ſeries harmonica talis eſt, ut a ſe ipſa, multata primo termino, non differat: proinde-

que

que primus terminus, nempe unitas, evaneſcit reſpectu totius ſeriei: quod non aliter fieri poſ-
* art. 494. ſe perſpicuum eſt *, niſi ſumma infinitorum terminorum ſeriei harmonicæ ſit infinita.

630. Sed aliam adhuc ejuſdem rei demonſtrationem afferamus. Nimirum ea ſumma cenſeri debet infinita, ex qua, detracta unitate, rurſus alia, atque alia in infinitum detrahi poteſt. Itaque a principio ſeriei harmonicæ abſcindantur termini aliquot, quorum ſumma unitatem vel adæquet, vel excedat. Ergo, ſi hæc terminorum abſciſſio in infinitum poteſt continuari, jam totius ſerei harmonicæ ſumma erit infinita. Quod ſi vero, facta ſæpius ea terminorum abſciſſione, negas, ulterius eam fieri poſſe, quia forte termini reliqui unitatem non excedant; repræſentet indefinite n numerum illum, qui dividit unitatem in primo reliquorum terminorum.

631. Jam primi illius termini capiatur pars, denominata ab $(n+1):n$, hujuſque iterum pars conſimilis, atque ita deinceps. Conſtituetur ergo in hunc modum progreſſio geometrica decreſcens, cujus quiſque terminus minor erit unoquoque reliquorum ſeriei harmonicæ. Quare ſumma illius progreſſionis minor erit ſumma terminorum omnium, qui ramanſerunt in ſerie harmonica. Eſt autem ſumma infinitorum ter-
* art. 513. minorum ejus progreſſionis * æqualis unitati. Itaque erit unitate major ſumma reliquorum terminorum ſeriei harmonicæ: proindeque adhuc ex iis abſcindi poterunt termini aliquot, qui unitatem, vel adæquent, vel proxime excedant. Et quoniam eadem eſt ſemper demonſtratio de

re-

reliquis terminis ; concludendum eſt, ſeriem harmonicam talem eſſe, ut, detracta ex ea unitate una, rurſus alia, atque alia in infinitum detrahi poſſit. Unde ſummam infinitorum ejus terminorum infinitam eſſe oportebit.

632. Theorema igitur, ſuperius * poſitum, obtinet etiam in ſerie, quæ oritur ex inverſione numerorum naturalium, dummodo numeri naturales inter ordines figuratorum ſubinde collocentur, ut ſit zero, ſeu nihil exponens ordinis ipſorum. Cur autem hæc ſeries dicatur harmonica, haud difficile erit intelligere: nimirum, quia tres ejus quilibet termini, conſecutive ſumpti, harmonicam proportionem conſtituunt. Quod ut generaliter oſtendamus, ſit $1:n$ ſeriei illius terminus aliquis. Erunt igitur $1:(n+1)$, $1:(n+2)$ termini duo, qui immediate illum excipiunt. Unde oſtendendum eſt, tres iſtos terminos eſſe in proportione harmonica, hoc eſt maximum $1:n$ eſſe ad minimum $1:(n+2)$, ut eſt differentia inter maximum, & medium ad differentiam inter medium, & minimum. Quod quidem perſpicuum eſt. Nam prior differentia eſt $1:(n^2+n)$, ſecunda vero eſt $1:(n^2+3n+2)$. Profecto autem, ut eſt $1:n$ ad $1:(n+2)$, ita eſt $1:(n^2+n)$ ad $1:(n^2+3n+2)$.

* art. 623.

633. Cæterum artificium, quo hic uſi ſumus, pro inveniendis ſummis finitis ſerierum infinitarum, per ſubductionem unius ſeriei a ſe ipſa, priore termino multata, nonniſi cum cautione debet adhiberi. Nam, exempli gratia, ſi a ſerie harmonica $1:1+1:2+1:3+1:4+1:5+$ &c. ſubducatur eademmet,

mul-

multata primo termino ; orietur ſeries 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + &c. æqualis unitati, hoc eſt priori termino ipſius ſeriei harmonicæ. Sed, ſi a ſerie 2 : 1 + 3 : 2 + 4 : 3 + 5 : 4 + 6 : 5 + &c. ſubducatur eadem ſeries, multata ſimiliter primo termino ; relinquetur adhuc 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + &c., nec tamen dici poteſt, ſummam iſtius ſeriei æqualem eſſe illius priori termino ; quum prior terminus illius, non ſit unitas, ſed binarius.

634. Hujus rei ratio ut clarius intelligatur, notetur velim, quod quum ab aliqua ſerie eademmet, priore termino multata, ſubtrahitur; ſumma ſeriei reliquæ, non eſt quidem primus terminus, ſed primus, ultimo minutus. Per hujuſmodi enim ſubductionem non aliud efficitur, quam ut terminorum differentiæ capiantur. Unde eo res redit, ut oſtendamus, omnes illas differentias ſimul æquales eſſe differentiæ inter primum, & ultimum terminum. Id vero liquet abunde. Nam, ſi fuerint quotcumque magnitudines a, b, c, d, e, f, g, clare patet, omnium differentias ſimul $a - b$, $b - c$, $c - d$, $d - e$, $e - f$, $f - g$ æquales eſſe $a - g$; hoc eſt primæ, ultima minutæ.

635. Jam, quum ultimus ſeriei terminus evaneſcit in infinitum, ut contingit in ſerie harmonica, nihil obſtat, quominus dicamus, id, quod relinquitur, quotieſcumque ab aliqua ſerie eademmet, priore termino multata, ſubtrahitur, priorem terminum adæquare ; quandoquidem prior terminus, per ultimi ſubtractionem, non minuitur. Sed quum ultimus ſeriei terminus non evaneſcit, tunc ad inveniendam ſummam

mam ſeriei reliquæ, neceſſe eſt, ut ultimus terminus a priore ſubducatur. Quocirca, quia in ſerie $2:1 + 3:2 + 4:3 + 5:4 + 6:5 +$ &c. ultimus terminus unitatem adæquat, quum æquales fiant * ejus numerator, & denominator: *art. 594. proinde ſumma ſeriei reliquæ erit prior terminus, unitate minutus, hoc eſt eadem omnino cum illa, quæ per ſeriem harmonicam invenitur.

CAPUT IV.

Series ſummabiles, quæ figuratis aliorum generum fiunt.

636. Figuratis aliorum generum ſimiliter fieri poſſunt ſeries nonnullæ, in quibus determinare licet ſummas finitas omnium ſuorum terminorum. Ut autem de aliis hiſce ſeriebus commode diſſeramus, non abs re erit, ipſam primo naturam horum figuratorum nonnihil contemplari. Et quantum ad eorum in genera diſtinctionem, jam quidem diximus ſupra *, quomodo ea ſit facienda; nimirum, *art. 576. pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur: adeo, ut quemadmodum dicuntur primi generis, quum genitores progrediuntur intervallo unitatis; ſic dici debeant ſecundi generis, quum progrediuntur intervallo binarii; tertii generis, quum progrediuntur intervallo ternarii; atque ita deinceps.

637. Sed, quemadmodum figuratos primi generis diſtinximus ſuperius * in varios ordines, pro diverſa ratione, qua ex ſuis genitoribus ori- *art. 577.

ri

ri intelliguntur ; ſic eadem diſtinctio fieri quoque poteſt, relate ad figuratos aliorum generum. Unde in quolibet genere dicemus figuratos primi ordinis, qui oriuntur ex continua collectione ipſorum genitorum; dicemus figuratos ſecundi ordinis, qui ex additione continua figuratorum primi ordinis ſuam originem trahunt; dicemus figuratos tertii ordinis, qui generantur per continuam collectionem figuratorum ordinis ſecundi; atque ita in infinitum.

I. *Genitorum, & figuratorum omnium generum proprietas ſingularis.*

638. GEnitores figuratorum omnium generum hanc habent proprietatem, quod ſi iis, qui primi ſunt generis, zero præfigatur, iidemque ordine adjungantur genitoribus alterius cujuſque generis, oriuntur genitores generis ſequentis. Ita numeri 0, 1, 2, 3, 4, &c., qui ſunt genitores primi generis, zero habentes in principio, ſi addantur ordine cum ipſis genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, &c., orientur numeri 1, 3, 5, 7, 9, &c., qui ſunt genitores generis ſecundi; ſi vero addantur ordine cum aliis hiſce genitoribus ſecundi generis, habebuntur numeri 1, 4, 7, 10, 13, &c., qui ſunt genitores generis tertii.

639. Hac mediante proprietate, facile erit, ex genitoribus primi generis cujuſcumque alterius generis genitores derivare. Præfigatur etenim zero genitoribus primi generis. Et, ſiquidem ii, toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum genitorum, una dem-

dempta, addantur ordine cum ipſis primi generis genitoribus; habebuntur genitores generis quæſiti. Ita, ſi quærantur genitores generis quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c., qui ſunt genitores primi generis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 6, 9, 12, &c.; deinde addantur ordine cum genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, &c.; eruntque numeri prodeuntes 1, 5, 9, 13, 17, &c. genitores generis quarti.

640. Eadem proprietas, non ſolum genitoribus figuratorum, ſed ipſis etiam figuratis competit. Si enim numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt, zero præfigatur, iique ordine adjungantur numeris, qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in quovis alio genere; orientur figurati primi ordinis generis ſubſequentis. Ita numeri 0, 1, 3, 6, 10, &c., qui in primo genere ſunt figurati primi ordinis, zero habentes in principio, ſi addantur ordine cum ipſis numeris, 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo; ſi vero ordine addantur cum iſtis, habebuntur numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere tertio.

641. Unde etiam, proprietatis hujus beneficio, facile erit, ex numeris, qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui ſint figurati primi ordinis in quovis alio genere. Præfigatur etenim zero iis, qui ſunt primi generis. Et ſiquidem

iidem, toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, una dempta, addantur ordine cum ipſis numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt; habebuntur figurati primi ordinis generis quæſiti. Ita, ſi quærantur figurati primi ordinis generis quarti; capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 3, 6, 10, &c., qui in primo genere ſunt figurati primi ordinis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 9, 18, 30, &c.; deinde addantur ordine cum numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum primi generis; & numeri, inde orti, 1, 6, 15, 28, 45, &c. erunt figurati primi ordinis in genere quarto.

642. Eadem ratione, ſi numeris, qui ſecundum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt, zero præfigatur, iique ordine adjungantur numeris, qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum in quovis alio genere; orientur figurati ſecundi ordinis generis ſubſequentis. Ita numeri 0, 1, 4, 10, 20, &c., qui in primo genere ſunt figurati ſecundi ordinis, zero habentes in principio, ſi addantur ordine cum ipſis numeris 1, 4, 10, 20, 35, &c., qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 5, 14, 30, 55, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere ſecundo; & ſi porro ordine addantur cum iſtis, habebuntur numeri 1, 6, 18, 40, 75, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere tertio.

643. Unde ſimiliter, ope hujus proprietatis, facile erit, ex numeris, qui conſtituunt ſecundum

dum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui ſint figurati ſecundi ordinis in quovis alio genere. Præfigatur etenim zero iis, qui ſunt primi generis. Et ſiquidem iidem, toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, una dempta, addantur ordine cum ipſis numeris, qui ſecundum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt; habebuntur figurati ſecundi ordinis generis quæſiti. Ita, ſi quærantur figurati ſecundi ordinis generis quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 4, 10, 20, &c., qui in primo genere ſunt figurati ſecundi ordinis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 12, 30, 60, &c.; deinde addantur ordine cum numeris 1, 4, 10, 20, 35, &c., qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum primi generis; & numeri, inde orti, 1, 7, 22, 50, 95, &c. erunt figurati ſecundi ordinis in genere quarto.

644. Pro hujus proprietatis demonſtratione, oſtendendum eſt prius hoc theorema, quod ſi fuerint quotcumque ſeries numerorum, eam proprietatem habentes, ut præfixo zero iis, qui primam ſeriem conſtituunt, iiſdemque additis ordine cum numeris cujuſcumque ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis; & ex collectione continua numerorum, ſeries illas conſtituentium, conficiantur totidem aliæ numerorum ſeries: quod inquam aliæ iſtæ ſeries eandem habent proprietatem, ac primæ: adeo, ut ſi numeris primæ ſeriei zero præfigatur, iique ordine addantur cum numeris cujuſque ſeriei; qui inde oriuntur, ſint numeri ſeriei ſubſequentis.

645. Sint igitur a, b, c, d, &c., a, e, f, g,

&c., a, b, i, k, &c., a, l, m, n, &c. ſeries aliquot numerorum, quæ eam habeant proprietatem, ut ſi numeris, qui primam ſeriem conſtituunt, zero præfigatur, iique ordine adjungantur numeris cujuſcumque ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis. Fiant autem collectione continua numerorum, ſeries illas conſtituentium, totidem aliæ ſeries a, a, p, q, &c., a, r, s, t, &c., a, u, x, y, &c., a, z, &, w, &c. Dico, novas iſtas ſeries eandem cum primis proprietatem habere: ita nempe, ut ſi numeris, qui primam ſeriem conſtituunt, zero præfigatur, iique ordine addantur cum numeris cujuſque ſeriei; oriantur exinde numeri, qui conſtituunt ſeriem ſubſequentem.

646. Ex hypotheſi enim primæ ſeries eam habent proprietatem, ut præfixo zero numeris, qui primam ſeriem conſtituunt, iiſdemque additis ordine cum numeris alicujus ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis. Quare, exiſtentibus numeris primæ ſeriei a, b, c, d, &c.; fient numeri ſeriei ſecundæ a, $a+b$, $b+c$, $c+d$, &c.; numeri ſeriei tertiæ a, $2a+b$, $2b+c$, $2c+d$, &c.; numeri ſeriei quartæ a, $3a+b$, $3b+c$, $3c+d$, &c.; atque ita deinceps. Et quoniam ſecundæ ſeries oriuntur ex collectione continua numerorum, ſeries primas conſtituentium; prima ex ſecundis iſtis ſeriebus erit a, $a+b$, $a+b+c$, $a+b+c+d$, &c.; ſecunda a, $2a+b$, $2a+2b+c$, $2a+2b+2c+d$, &c.; tertia a, $3a+b$, $3a+3b+c$, $3a+3b+3c+d$, &c.; quarta a, $4a+b$, $4a+4b+c$, $4a+4b+4c+d$, &c.; atque ita in infinitum.

647.

647. Jam, deſignatis hac ratione ſecundis ſeriebus, liquet, primos terminos ipſarum a ſe mutuo non differre, quum omnes per *o* deſignentur; ſed non item terminos alios, quum ſecundi differant a ſe mutuo per *a*, tertii per $a + b$, quarti per $a + b + c$, atque ita deinceps. Unde, quum oriatur ſemper terminus ſubſequens, ſi alicui ex ſecundis addatur *a*, alicui ex tertiis addatur $a + b$, alicui ex quartis addatur $a + b + c$, atque ita in infinitum; perſpicuum eſt, quod ſi termini, *o*, *a*, $a + b$, $a + b + c$, &c. addantur ordine terminis cujuſque ex iis ſeriebus, oriuntur termini ſeriei ſubſequentis. Sunt autem *o*, *a*, $a + b$, $a + b + c$, &c. numeri, conſtituentes primam earum ſerierum, & zero habentes in principio. Quare proprietas illa non ſolum in primis, verum etiam in ſecundis ſeriebus locum habebit.

648. Oſtenſo hoc theoremate, haud difficile modo erit, rationem reddere ejus proprietatis, quæ deprehenditur in numeris, qui in ſingulis generibus eundem figuratorum ordinem conſtituunt. Primo enim numeri, qui in unoquoque genere ſunt figurati primi ordinis, oriuntur * ex continua collectione genitorum, qui ad ſua quæque genera referuntur. Jam vero numeri iſti genitores hanc * habent proprietatem, ut ſi iis, qui ſunt primi generis, zero præfigatur, iidemque ordine adjungantur genitoribus cujuſque generis; oriantur genitores generis ſubſequentis. Itaque, per oſtenſum theorema, hæc eadem proprietas obtinebit etiam in numeris, qui in ſingulis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt.

*art. 637.

*art. 638.

649. Et quoniam numeri, qui in ſingulis generibus conſtituunt ſecundum ordinem figu-
*art.637. ratorum, oriuntur * ex continua collectione eorum, qui in iiſdem generibus conſtituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa
*art.648. obtinet * in iſtis, ita etiam, per oſtenſum theorema, locum habebit in iis. Unde porro, quia numeri, qui conſtituunt in unoquoque genere
*art.637. tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex * collectione continua eorum, qui in eodem genere conſtituunt ordinem ſecundum; obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis. Atque hac ratione gradatim in omnibus aliis figuratis, qui ſunt unius, ejuſdemque ordinis, proprietatem illam locum habere comperiemus.

650. Cæterum, eandem proprietatem competere pariter numeris, quos figuratorum genitores appellamus; liquebit, ſi conſideremus, genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continua collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c.; genitores ſecundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continua binariorum, quibus unitas ſit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c.; genitores tertii generis, tamquam progredientes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continua ternariorum, quibus ſimiliter unitas ſit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

651. Quum enim ſeries horum numerorum 1, 1, 1, 1, 1, &c., 1, 2, 2, 2, 2, &c., 1, 3, 3, 3, 3, &c., 1, 4, 4, 4, 4, &c., ex quibus genitores generum omnium continua collectione oriuntur,

tur; hujuſmodi ſint, ut inter primos ipſarum terminos nulla adſit differentia, inter alios vero ea intercedat, ut ubique quiſque antecedens deficiat a ſubſequente per unitatem; perſpicuum eſt, in iis ſeriebus proprietatem illam locum habere. Unde, per oſtenſum theorema, eadem proprietas obtinebit etiam in ſeriebus, quæ genitores generum omnium comprehendunt; quandoquidem iſtæ ſeries, ut dictum eſt *, oriuntur ex iis per continuam collectionem ſuorum terminorum. *art.650.

II. Ratio colligendi figuratos cujuſque ordinis in ſingulis generibus.

652. QUomodo ſint colligendi figurati cujuſque ordinis, qui primi ſunt generis; jam quidem ſuperius demonſtravimus. Sed, cognitis ſummis figuratorum primi generis, per ea, quæ mox oſtenſa ſunt, facile erit, figuratos aliorum generum in unam quoq; ſummam colligere. Ut autem ab ipſis genitoribus ordiamur, jam vidimus ſuperius *, genitores cujuſcumque alterius generis haberi, ſi iis, qui primi ſunt generis, zero præfigatur, iidemque, toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum genitorum, una dempta, addantur ordine cum ipſis genitoribus primi generis. Quare, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam genitorum totidem, quot deſignat numerus m, non aliud fieri debet, quam in unum addere tot genitores primi generis, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam, toties acceptam, quot unita- *art.639.

649. Et quoniam numeri, qui in ſingulis generibus conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum, oriuntur * ex continua collectione eorum, qui in iiſdem generibus conſtituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa obtinet * in iſtis, ita etiam, per oſtenſum theorema, locum habebit in iis. Unde porro, quia numeri, qui conſtituunt in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex * collectione continua eorum, qui in eodem genere conſtituunt ordinem ſecundum; obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis. Atque hac ratione gradatim in omnibus aliis figuratis, qui ſunt unius, ejuſdemque ordinis, proprietatem illam locum habere comperiemus.

* art. 637.
* art. 648.
* art. 637.

650. Cæterum, eandem proprietatem competere pariter numeris, quos figuratorum genitores appellamus; liquebit, ſi conſideremus, genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continua collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c.; genitores ſecundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continua binariorum, quibus unitas ſit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c.; genitores tertii generis, tamquam progredientes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continua ternariorum, quibus ſimiliter unitas ſit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

651. Quum enim ſeries horum num[...] 1, 1, 1, 1, 1, &c., 1, 2, 2, 2, 2, &c. [...] 3, &c., 1, 4, 4, 4, 4, &c., ex quib[...] generum omnium continua coll[...]

tur, hujuſmodi ſint, ut [illegible]
terminos nulla adſit [illegible]
ea intercedat, ut [illegible]
deficiat a ſubſequente [illegible]
eſt, in iis ſeriebus [illegible]
bere. Unde, per [illegible]
proprietas obtinebit [illegible]
nitores generum [illegible]
doquidem iſta [illegible]
ex iis per co[illegible]
minorum.

II. *Ratio* [illegible]

652. Q[illegible] ...ui
[illegible] ...ti-
ſunt ge[illegible] ...tos *Art.641.
vimus. [illegible] ...is,
mi ge[illegible] ...nq;
erit, [illegible] ...po-
ſumm[illegible] ...dem-
ribus [illegible] ..., qui
nitores [illegible] ...e, ad
iis, qui [illegible] ...am to-
iidem[illegible] ...eſignat
net [illegible] ...uam in
uni [illegible] ...nis in ge-
ribus [illegible] & ſummam
in [illegible] ...tes continet
de[illegible] ...uratorum, una
ri [illegible] quæ oritur ex
[illegible] ...um, qui in gene-
[illegible] conſtituunt, quot
de-

tes continet exponens generis addendorum genitorum, una dempta, conjungere cum ſumma, quæ oritur ex additione tot aliorum genitorum primi generis, quot deſignat ipſe numerus m.

*art. 590. 594. 653. Jam per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, ſumma ex tot genitoribus primi generis, quot deſignat m, eſt ſemiſſis ejus, quod oritur, multiplicando m per $m + 1$. Atque ita quoque ſumma ex tot genitoribus ejuſdem generis, quot deſignantur per $m - 1$, eſt ſemiſſis ejus, quod producitur, multiplicando $m - 1$ per m. Quocirca, quia primum productum eſt $m^2 + m$, & productum ſecundum eſt $m^2 - m$; invenietur in unoque alio genere ſumma tot genitorum, quot denotat numerus m, ſi ad $(m^2 + m) : 2$ addatur toties $(m^2 - m) : 2$, quot unitates habet exponens generis addendorum genitorum, una dempta; hoc eſt ſemel, ſi genitores addendi fuerint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

654. Itaque, quia ſi ad $(m^2 + m) : 2$ addatur ſemel $(m^2 - m) : 2$, ſumma tota eſt $2m^2 : 2$, ſive potius $(2m^2 + om) : 2$; erit $(2m^2 + om) : 2$ ſumma ex tot genitoribus generis ſecundi, quot deſignat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $(m^2 - m) : 2$ bis ad $(m^2 + m) : 2$, eſt $(3m^2 - m) : 2$; erit $(3m^2 - m) : 2$ ſumma ex tot genitoribus generis tertii, quot deſignat numerus m. Atque ita quoque, deſignante ſemper m multitudine genitorum addendorum, erit ſumma quæſita $(4m^2 - 2m) : 2$, relate ad genitores generis quarti; $(5m^2 - 3m) : 2$, relate ad genitores generis

neris quinti; $(6m^2 - 4m):2$, relate ad genitores generis ſexti; atque ita deinceps.

655. Unde patet, ſummas iſtas indefinitas numerorum genitorum cujuſcumque generis miro quidem ordine progredi in infinitum; neque adeo oportere, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque ſemiſſis quantitatis, quæ duobus terminis conſtat. Atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur, per quadratum numeri m, qui deſignat, quot genitores in unum ſunt addendi; ſecundi vero habentur, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum regrediuntur, per ipſum numerum m.

656. Progrediamur modo ad figuratos, qui primum ordinem in unoquoque genere conſtituunt. Jamque vidimus ſuperius *, figuratos primi ordinis in omni alio genere haberi, ſi iis, qui primi ſunt generis, zero præfigatur, iidemq; toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorum, una dempta, addantur ordine cum ipſis figuratis, qui in primo genere primi ſunt ordinis. Quare, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum primi ordinis, quot deſignat numerus m, non aliud fieri debet, quam in unum addere tot figuratos primi ordinis in genere primo, quot deſignat $m - 1$, & ſummam iſtam, toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta, conjungere cum ſumma, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo primum ordinem conſtituunt, quot

* Art. 641.

de-

deſignat ipſe numerus m.

*art.591. 594. 657. Jam per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur, multiplicando per ſe invicem tres iſtos numeros m, $m + 1$, $m + 2$, & dividendo productum $m^3 + 3m^2 + 2m$ per 6. Atque ita quoque ſumma ex tot figuratis primi ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur, multiplicando per ſe mutuo tres iſtos numeros $m - 1$, m, $m + 1$, & productum $m^3 - m$ dividendo ſimiliter per 6. Quocirca, quia quotiens primæ diviſionis eſt $(m^3 + 3m^2 + 2m):6$, & quotiens ſecundæ eſt $(m^3 - m):6$; invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum primi ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad $(m^3 + 3m^2 + 2m):6$ addatur toties $(m^3 - m):6$, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint ſecundi generis; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

658. Itaque, quia ſi ad $(m^3 + 3m^2 + 2m):6$ ſemel addatur $(m^3 - m):6$, ſumma tota eſt $(2m^3 + 3m^2 + 1m):6$; erit hæc eadem quantitas ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere ſecundo, quot deſignat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $(m^3 - m):6$ bis ad $(m^3 + 3m^2 + 2m):6$ eſt $(3m^3 + 3m^2):6$, ſive etiam $(3m^3 + 3m^2 + 0m):6$; erit hæc alia quantitas ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere tertio, quot deſignat idem adhuc numerus m. Atque ita quoque, deſignante ſemper m multitudine figuratorum addendorum

dendorum, erit ſumma quæſita $(4m^3 + 3m^2 - 1m):6$ relate ad eos, qui ſunt quarti generis; $(5m^3 + 3m^2 - 2m):6$ reſpectu eorum, qui ſunt generis quinti; $(6m^3 + 3m^2 - 3m):6$ in ordine ad illos, qui ſunt generis ſexti; atque ita deinceps.

659. Ex quo patet, ſummas iſtas indefinitas numerorum, qui in omni genere primum figuratorum ordinem conſtituunt, miro quoque ordine progredi in infinitum; neque adeo oportere, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque ſexta pars quantitatis, quæ tribus terminis conſtat. Atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros naturales per cubum ipſius numeri m, qui deſignat, quot figurati in unum ſunt addendi; ſecundi, multiplicando numerum ternarium per quadratum ejuſdem numeri m; & tertii demum, multiplicando numeros, qui a binario per unitatis intervallum regrediuntur, per ipſum numerum m.

660. Eadem ratione determinare licebit ſummas indefinitas figuratorum, qui ad ordines alios in ſingulis generibus referuntur. Jam enim figurati, conſtituentes datum aliquem ordinem in omni alio genere, habentur, ſi iis, qui ſunt ejuſdem ordinis in genere primo, zero præfigatur, iidemque, toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorum, una dempta, addantur ordine cum ipſis figuratis, qui ſunt ejus ordinis in genere primo. Quare, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum dati cujuſdam ordinis, quot deſignat numerus m, non

aliud

aliud fieri debet, quam in unum addere tot figuratos ejus ordinis in genere primo, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam, toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta, conjungere cum ſumma, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo eundem ordinem conſtituunt, quot deſignat ipſe numerus m.

661. Ita, ſi de inveniendis ſummis indefinitis figuratorum ſecundi ordinis quæſtio ſit; per
*art. 592. ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, ſumma ex tot
594. figuratis ſecundi ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur, multiplicando per ſe invicem quatuor iſtos terminos m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, & dividendo productum per 24. Atque ita quoque ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur; multiplicando per ſe mutuo quatuor iſtos terminos $m - 1$, m, $m + 1$, $m + 2$, & productum dividendo ſimiliter per 24. Quocirca invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum ſecundi ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad priorem quotientem addatur toties quotiens ſecundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

662. Similiter, ſi agatur de inveniendis ſummis indefinitis figuratorum tertii ordinis;
*art. 593. per ea, quæ ſuperius *. oſtenſa ſunt, ſumma ex
594. tot figuratis tertii ordinis in genere primo, quot de-

deſignat numerus m, habetur, multiplicando per ſe mutuo iſtos quinque numeros m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, $m+4$, & dividendo productum per 120. Atque ita quoque ſumma ex tot figuratis tertii ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m-1$, habetur, multiplicando per ſe invicem hos quinque numeros $m-1$, m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, & dividendo productum ſimiliter per 120. Quare invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum tertii ordinis, quot deſignat numerus m, ſi ad quotientem, ortum ex prima diviſione, addatur toties quotiens, ortus ex diviſione ſecunda, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta.

663. Cæterum, quemadmodum in primo genere figuratorum oſtenſum eſt ſuperius *, ſummam omnium infinitorum terminorum eſſe ad ſummam terminorum totidem, æqualium maximo, ut 1 ad 2 in ipſis genitoribus, ut 1 ad 3 in figuratis primi ordinis, ut 1 ad 4 in figuratis ſecundi ordinis, ut 1 ad 5 in figuratis ordinis tertii, atque ita deinceps; ita licebit oſtendere, quod eædem proportiones obtinent quoque in figuratis cujuſcumque alterius generis. Dabimus autem præclaræ hujus theoriæ ſpecimen dumtaxat in iis, qui ſecundi ſunt generis. Quem in finem notabimus primo, quod quum genitores ſecundi generis progrediantur ab unitate per intervallum binarii, oriuntur ii per continuam additionem binariorum, quibus unitas ſit præfixa. Ex quo fit, ut genitor exiſtens in loco m, ſit $2m-1$; adeoque, ſi m ſta-

* art. 595.

tua-

tuatur numerus infinitus, idem genitor, qui
*art.494. omnium maximus evadit, erit * ſimpliciter $2m$.

664. Hoc prænotato, pergamus ad id, quod erat præcipuum. Ac primo quidem ſumma in-
*art.654. definita genitorum ſecundi generis eſt * $(2m^2 + 0m) : 2$, ſive etiam m^2; & , ubi m ponitur infinitus, eadem ſumma adhuc manet m^2. Quare ſumma iſta m^2 ad maximum genitorem $2m$, infinities etiam acceptum, hoc eſt ad $2m^2$, erit, ut 1 ad 2. Similiter ſumma indefinita figura-
*art.658. torum primi ordinis in genere ſecundo eſt * $(2m^3 + 3m^2 + 1m) : 6$. Itaq; exiſtente m numero infinito, hæc eadem ſumma erit $m^3 : 3$; & propterea ad maximum figuratum m^2, infinities etiam acceptum, hoc eſt ad m^3, erit, ut 1 ad 3. Atque ita quoque ſumma indefinita figuratorum ſecundi ordinis in eodem ſecundo genere
*art.661. eſt * $(2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m) : 24$. Quare, ubi m ponitur infinitus, hæc eadem ſumma erit $m^4 : 12$; adeoque ad maximum figuratum $m^3 : 3$, infinities etiam acceptum, hoc eſt ad $m^4 : 3$, erit, ut 1 ad 4.

III. Quæ ſint ſeries ſummabiles, quæ figuratis aliorum generum fieri poſſunt.

665. Quemadmodum ſeries, quæ fiunt, multiplicando figuratos primi generis ordine per terminos alicujus progreſſionis geometricæ decreſcentis, ſunt ſummabiles natura ſua; ſic etiam licebit, determinare ſummas finitas earum ſerierum, quæ oriuntur, multiplicando figuratos aliorum generum ordine per terminos progreſſionis non diſſimilis. Præſtari

id

Id autem poterit, ope ejus proprietatis, quæ in ipſis aliorum generum figuratis deprehenditur, & quam paulo ante oſtenſam exhibuimus. Quod ut liquido conſtet, experiemur id primum in ipſis figuratorum genitoribus, qui intelligendi ſunt habere zero, velut exponentem ſui ordinis, quotieſcumque ipſos quoque inter figuratorum ordines reponere lubet.

666. Multiplicentur itaque primo genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. ordine per terminos progreſſionis geometricæ decreſcentis a, $a:n$, $a:n^2$, $a:n^3$, $a:n^4$, &c., ita, ut fiat ſeries $1a + 3a:n + 5a:n^2 + 7a:n^3 + 9a:n^4$ + &c. Et quoniam genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. oriuntur *, addendo genitores generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum ipſis primi generis genitoribus 1, 2, 3, 4, 5, &c.; componetur ſeries illa per additionem terminorum duarum iſtarum ſerierum $0a + 1a:n + 2a:n^2 : + 3a:n^3 + 4a:n^4$ + &c., $1a + 2a:n + 3a:n^2 + 4a:n^3 + 5a:n^4$ + &c. Quare ſumma omnium infinitorum terminorum illius ſeriei æqualis erit ſummis, quæ ex infinitis iſtorum terminis, ſimul collectis, oriuntur. *art. 638.

667. Jam ſeries $1a + 2a:n + 3a:n^2 + 4a:n^3 + 5a:n^4$ + &c. eſt ſummabilis natura ſua, eſtque ejus ſumma * $n^2a:(n-1)^2$. Unde eo res redit, ut inveſtigemus ſummam alterius ſeriei $0a + 1a:n + 2a:n^2 + 3a:n^3 + 4a:n^4$ + &c. Id vero factu facile erit. Nam, neglecto primo ejus termino $0a$, velut nullius magnitudinis; perſpicuum eſt, unumquemque terminum ipſius ad correſpondentem terminum prio- *art. 614.

prioris ſeriei $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 +$ &c. eſſe in ea ratione, quam habet 1 ad n. Quare in eadem ratione erunt etiam inter ſe ſummæ ipſarum ſerierum: & propterea, quemadmodum ſumma unius eſt $n^2a : (n - 1)^2$, ſic erit ſumma alterius $na : (n - 1)^2$. Ex quo fit, ut ſumma ſeriei, de qua agitur, ſit $na : (n - 1)^2 + n^2a : (n - 1)^2$, ſive etiam $(na + n^2a) : (n - 1)^2$.

668. Multiplicentur ſecundo genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. ordine per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$ &c., ita, ut habeatur ſeries $1a + 4a : n + 7a : n^2 + 10a : n^3 + 13a : n^4 +$ &c. Et quoniam genitores tertii generis 1, 4, 7,
*Art 638. 10, 13, &c. oriuntur *, addendo genitores generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum genitoribus ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c.; componetur ſeries illa per additionem terminorum duarum iſtarum ſerierum $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 +$ &c., $1a + 3a : n + 5a : n^2 + 7a : n^3 + 9a : n^4 +$ &c.
*Art. 667. Sed harum ſerierum, ut jam oſtenſum eſt *, prima eſt æqualis $na : (n - 1)^2$, ſecunda vero eſt æqualis $(na + n^2a) : (n - 1)^2$. Itaque ſumma ſeriei, de qua eſt quæſtio, erit $na : (n - 1)^2 + (na + n^2a) : (n - 1)^2$, ſive etiam $(2na + n^2a) : (n - 1)^2$.

669. Multiplicentur tertio genitores quarti generis 1, 5, 9, 13, 17, &c. per terminos ejuſdem adhuc progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut conſtituatur ſeries $1a + 5a : n + 9a : n^2 + 13a : n^3 + 17a : n^4 +$ &c. Et quoniam genitores quarti ge-

generis 1, 5, 9, 13, 17, &c., oriuntur *, addendo genitores generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum genitoribus tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c.; componetur ſeries illa per additionem terminorum duarum iſtarum ſerierum $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 +$ &c., $1a + 4a : n + 7a : n^2 + 10a : n^3 + 13a : n^4 +$ &c. Sed harum ſerierum prima eſt æqualis * $na : (n - 1)^2$, ſecunda vero eſt æqualis * $(2na + n^2a) : (n - 1)^2$. Quare ſumma illius ſeriei erit $na : (n - 1)^2 + (2na + n^2a) : (n - 1)^2$, ſive etiam $(3na + n^2a) : (n - 1)^2$.

*art. 638.
*art. 667.
*art. 668.

670. Eodem artificio determinare licebit ſummam finitam cujuſque alterius ſeriei, quæ oriatur, multiplicando genitores cujuſvis generis altioris per terminos progreſſionis geometricæ decreſcentis a, $a : n$, $a : n^2$, $a : n^3$, $a : n^4$, &c. Nimirum, conſiderando ſeriem illam, velut compoſitam ex duabus aliis ſeriebus; quarum una ſit conſtituta ex genitoribus primi generis, zero habentibus in principio; altera ex genitoribus illius generis, quod proxime præcedit genus, de cujus genitoribus agitur. Sed, perpenſa ratione, qua harum ſerierum ſummæ progrediuntur, poterit regula quædam generalis confici, ad omnes caſus ſe extendens: ſcilicet, addendo ſemper ad $n^2a : (n - 1)^2$ toties $na : (n - 1)^2$, quot unitates habet exponens generis datorum genitorum, una dempta; hoc eſt nullies, ſi genitores fuerint primi generis; ſemel, ſi generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

671. Hoc idem oſtendamus modo in nume-

ris, qui primum figuratorum ordinem in aliis generibus conſtituunt. Quem in finem multiplicentur primo figurati, qui conſtituunt primum ordinem in genere ſecundo, 1, 4, 9, 16, 25, &c. ordine per terminos progreſſionis geometricæ decreſcentis $a, a:n, a:n^2, a:n^3, a:n^4$, &c., ita, ut habeatur ſeries $1a + 4a:n + 9a:n^2 + 16a:n^3 + 25a:n^4 +$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere ſecundo oriun-
*art. 640. tur *, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, zero habentes in principio, 0, 1, 3, 6, 10, &c. ordine cum ipſis numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui primum figuratorum ordinem in primo genere conſtituunt; componetur ſeries illa ex additione terminorum duarum iſtarum ſerierum $0a + 1a:n + 3a:n^2 + 6a:n^3 + 10a:n^4 +$ &c., $1a + 3a:n + 6a:n^2 + 10a:n^3 + 15a:n^4 +$ &c. Quare ſumma omnium infinitorum terminorum illius ſeriei æqualis erit ſummis, quæ ex infinitis iſtarum terminis ſimul collectis oriuntur.

672. Jam ſeries $1a + 3a:n + 6a:n^2 +$
*art. 616. $10a:n^3 + 15a:n^4 +$ &c. eſt ſummabilis natura ſua, eſtque * ejus ſumma $n^3a:(n-1)^3$. Unde eo res redit, ut inveſtigemus ſummam alterius ſeriei $0a + 1a:n + 3a:n^2 + 6a:n^3 + 10a:n^4 +$ &c. Id vero factu facile erit. Nam, neglecto primo ejus termino $0a$, velut nullius magnitudinis; perſpicuum eſt, unumquemque terminum ipſius ad correſpondentem terminum prioris ſeriei $1a + 3a:n + 6a:n^2 + 10a:n^3 + 15a:n^4 +$ &c. eſſe in ea ratione, quam habet 1 ad n. Quare in eadem ratione erunt etiam inter ſe ſummæ ipſarum ſerierum; & propterea,

quem-

quemadmodum ſumma unius eſt $n^3a:(n-1)^3$, ſic erit ſumma alterius $n^2a:(n-1)^3$. Ex quo fit, ut ſumma ſeriei, de qua agitur, ſit $n^2a:(n-1)^3+n^3a:(n-1)^3$, ſive etiam $(n^2a+n^3a):(n-1)^3$.

673. Multiplicentur ſecundo numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum tertii generis, ordine per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ decreſcentis a, $a:n$, $a:n^2$, $a:n^3$, $a:n^4$, &c., ita, ut conſtituatur ſeries $1a+5a:n+12a:n^2+22a:n^3+35a:n^4+$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c. oriuntur *, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, & zero habent in principio, 0, 1, 3, 6, 10, &c. ordine cum numeris 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere ſecundo; componetur ſeries illa ex additione terminorum duarum iſtarum ſerierum $0a$, $1a:n+3a:n^2+6a:n^3+10a:n^4+$ &c., $1a+4a:n+9a:n^2+16a:n^3+25a:n^4+$ &c. Sed harum ſerierum, ut jam oſtenſum eſt *, prima eſt æqualis $n^2a:(n-1)^3$, ſecunda vero eſt æqualis $(n^2a+n^3a):(n-1)^3$. Itaque ſumma ſeriei, de qua eſt quæſtio, erit $n^2a:(n-1)^3+(n^2a+n^3a):(n-1)^3$, ſive etiam $(2n^2a+n^3a):(n-1)^3$.

* art. 640.

* art. 672.

674. Multiplicentur tertio numeri 1, 6, 15, 28, 45, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum quarti generis, ordine per terminos ejuſdem adhuc progreſſionis geometricæ decreſcentis a, $a:n$, $a:n^2$, $a:n^3$, $a:n^4$, &c., ita, ut fiat ſeries $1a+6a:n+15a:n^2+28a:n^3+45a:n^4+$ &c. Et ſimiliter, quia figura-

tis ; alteram, invertendo eoſdem figuratos, & faciendo, ut ſint denominatores fractionum totidem, quarum quælibet unitatem habeat, velut ſuum numeratorem. Unde, quum oſtenſum ſit, figuratos aliorum generum, ordine etiam multiplicatos per terminos progreſſionis non diſſimilis, præbere nobis ſeries, quarum ſummæ finitæ poſſunt determinari;dubium hic oriri poteſt, num ſint pariter ſummabiles ſeries illæ,quæ habentur, ſi iidem aliorum generum figurati invertantur, & denominatores fiant fractionum, pro numeratore unitatem habentium. Eſſe enim finitas ſummas harum ſerierum,quæ conſtituuntur per inverſionem figuratorum aliorum generum ; vel exinde erui poteſt, quod termini ipſarum, collati ſigillatim cum terminis ſerierum, quæ fiunt per inverſionem figuratorum primi generis, iiſdem manifeſto ſunt minores.

678. Verum, rei periculo inſtituto, variiſque methodis tentatis, numquam id aſſequi potuimus. Unde, tametſi ſummæ ſerierum, quæ conſtituuntur per inverſionem figuratorum aliorum generum, ſint finitæ ; eas tamen non eſſe ſummabiles natura ſua, affirmare non veremur. Novit id etiam Vir clariſſimus Jacobus Bernoullius, ſed in uno caſu ſpeciali, nimirum in ſerie infinita $1:1 + 1:4 + 1:9 + 1:16 + 1:25 +$ &c, quæ conſtituitur per inverſionem quadratorum numerorum naturalium, qui ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo. Nam in ſuo de ſeriebus infinitis tractatu, ex quo non pauca mutuati nos ſumus, ingenue fatetur, perveſtigationem finitæ ſummæ illius ſeriei difficiliorem eſſe, quam quis expectaverit,

& in-

& induſtriam ſuam prorſus eluſiſſe. Exhibuit tamen rationem, quam ſumma ex terminis omnibus locorum imparium 1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + &c. habet ad ſummam terminorum, exiſtentium in locis paribus, 1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + &c. : idque ſequenti artificio.

679. Conſtituantur infinitæ ſeries, quæ, incipientes a quadratis numerorum imparium inverſis, progrediantur in ea ratione, quam habet 4 ad 1. Erit itaque harum ſerierum prima 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 64 + &c., ſecunda 1 : 9 + 1 : 36 + 1 : 144 + 1 : 576 + &c., tertia 1 : 25 + 1 : 100 + 1 : 400 + 1 : 1600 + &c., atque ita deinceps. Et quoniam in cunctis hiſce ſeriebus continentur quadrati omnes inverſi numerorum naturalium; eædem ſimul adæquabunt ſeriem, de qua agitur, 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + &c. Jam vero illiuſmodi ſeries, veluti totidem progreſſiones geometricæ decreſcentes, ſunt * ſummabiles natura ſua, & eujuſque ſumma reperitur æqualis priori ſuo termino, una cum tertia parte ejuſdem. Itaque, quia priores termini omnium illarum ſerierum ſunt quadrati inverſi numerorum imparium; erit ſeries 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + &c. æqualis ſeriei 1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + &c. una cum tertia parte ejuſdem: proindeque differentia utriuſque ſeriei 1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + &c. adæquabit tertiam partem iſtius 1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + &c.

* art. 513.

680. Hoc igitur artificio laudatus Jacobus Bernoullius novit, in ſerie 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9

+ 1 : 16 + 1 : 25 + &c., quæ conſtituitur per inverſionem quadratorum numerorum naturalium, ſummam terminorum in locis imparibus eſſe ad ſummam terminorum in locis paribus, ut 3 ad 1. Neque vero putandum eſt, eadem methodo poſſe ſimile quidpiam determinari in ſeriebus, quæ conſtituuntur per inverſionem aliorum figuratorum. Nam licuit Viro clariſſimo, theorema illud invenire in ſerie iſta ſpeciali 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + &c, non jam, quia numeri 1, 4, 9, 16, 25, &c. ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo, ſed quia ſunt quadrati numerorum naturalium. Et, notante eodem Jacobo Bernoullio, id commune eſt omnibus poteſtatibus numerorum naturalium, ut ſiquidem ex earum inverſione conſtituantur totidem ſeries infinitæ; ratio, quam in iis habet ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ſit æqualis ei, quam habet poteſtas non diſſimilis binarii, unitate multata, ad ipſam unitatem.

681. Demonſtratur id vero in aliis poteſtatibus eadem omnino ratione, qua oſtenſum eſt
*art.679. * in quadratis. Nimirum, reſolvendo ſeriem, de qua agitur, in infinitas alias ſeries, quarum termini à poteſtatibus numerorum imparium inverſis progrediantur in ea ratione, quam habet poteſtas non diſſimilis binarii ad unitatem; hoc eſt, ut 8 ad 1, ſi agatur de cubis; ut 16 ad 1, ſi agatur de quadrato-quadratis; ut 32 ad 1, ſi quæſtio ſit de quadrato-cubis; atque ita dein-
*art.413. ceps. Quum enim omnes iſtæ ſeries ſint * ſummabiles, & cujuſque ſumma finita adæquet

prio-

priorem ſuum terminum, una cum ea ejuſdem parte, quam denominat prædicta poteſtas binarii, unitate una multata; fiet tota ſeries, de qua agitur, æqualis ſeriei, quæ oritur ex poteſtatibus inverſis numerorum imparium, una cum ea ejuſdem ſeriei parte, quam poteſtas binarii, unitate minuta, deſignat. Quare, ſubducendo ſeriem iſtam ex illa; fiet ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ut eſt poteſtas binarii, unitate multata, ad ipſam unitatem.

682. Eodem omnino argumento patebit; hanc eandem determinationem ſibi etiam locum vindicare in ipſis numeris naturalibus inverſis, qui ſunt primæ ipſorum poteſtates; adeoque in ſerie harmonica $1:1+1:2+1:3+1:4+1:5+$ &c. ſummam terminorum imparium eſſe ad ſummam terminorum parium, ut eſt prima poteſtas binarii, unitate multata, ad ipſam unitatem, hoc eſt in ratione æqualitatis. Sed obtinet quoque eadem determinatio, vi ejuſdem ratiocinii, in radicibus numerorum naturalium, ſive quadratis, ſive cubicis, ſive alterius cujuſque generis. Qua ratione in iſta ſerie $1:\sqrt{1}+1:\sqrt{2}+1:\sqrt{3}+1:\sqrt{4}+1:\sqrt{5}+$ &c. ſumma terminorum in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum in locis paribus, ut $\sqrt{2}-1$ ad 1. Atque ita quoque in hac alia ſerie $1:\sqrt[3]{1}+1:\sqrt[3]{2}+1:\sqrt[3]{3}+1:\sqrt[3]{4}+1:\sqrt[3]{5}$ $+$ &c. ſumma ex terminis locorum imparium eſt ad ſummam ex terminis locorum parium, ut eſt $\sqrt[3]{2}-1$ ad 1.

683. Interim, circa hujuſmodi ſeries, quæ

oriun-

oriuntur ex inverſione radicum numerorum naturalium, præclarum hic nobis ſeſe offert paradoxum. In iis enim ſumma ex terminis locorum imparium eſt ad ſummam ex terminis locorum parium, ut eſt radix non diſſimilis binarii, unitate multata, ad ipſam unitatem; adeoque in ratione minoris ad majus. Plane vero, ſi termini locorum imparium ſigillatim conferantur cum terminis locorum parium; eos iſtis manifeſto majores deprehendemus. Sic in ſerie $1:\sqrt{1} + 1:\sqrt{2} + 1:\sqrt{3} + 1:\sqrt{4} + 1:\sqrt{5} + 1:\sqrt{6}$ + &c., liquido patet eſſe, & $1:\sqrt{1}$ majorem, quam $1:\sqrt{2}$; & $1:\sqrt{3}$ majorem, quam $1:\sqrt{4}$; & $1:\sqrt{5}$ majorem, quam $1:\sqrt{6}$; atque ita deinceps. Quare oportebit, ut ſumma priorum terminorum major ſit etiam ſumma poſteriorum; quum tamen ſumma illorum ad ſummam iſtorum eſſe debeat in ratione minoris ad majus, hoc eſt, ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1.

684. Novit paradoxum iſtud ipſe hujus theoriæ Auctor Jacobus Bernoullius: qui etſi ejus rationem, ut ipſe ait, ſatis perſpectam habuiſſet; illam tamen cum orbe mathematico nequaquam communicare dignatus eſt. Idem autem paradoxum deprehenditur quoque in *ſerie*, quæ conſtituitur per inverſionem numerorum naturalium, nimirum in ſerie harmonica $1:1 + 1:2 + 1:3 + 1:4 + 1:5 + 1:6$ + &c. In ea enim ſumma terminorum in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum in locis paribus in ratione æqualitatis; quum tamen ii, ſigillatim cum iſtis comparati, manifeſto majores deprehendantur. Verum in ſerie harmonica paradoxum iſtud, notante ipſo *Bernoullio*, potius

tius argumento nobis eſſe poteſt pro infinitate ſummæ ejus adſtruenda. Nam ex eo, quod ſumma terminorum imparium ad ſummam terminorum parium rationem habet æqualitatis, colligere licebit, differentiam inter utramque ſummam evaneſcere relate ad eas: quod non aliter fieri poteſt, niſi ſit infinita, tam ſumma terminorum imparium, quam ſumma terminorum parium.

685. Jam enim notum eſt, finitum evaneſcere relate ad infinitum. Plane vero in ſerie harmonica finitam eſſe differentiam inter ſummam terminorum in locis imparibus, & ſummam terminorum in locis paribus; ſic quidem conjici poteſt. Subducantur etenim termini ſecundæ ſummæ ordine ex terminis primæ. Jamque differentia inter utramque ſummam fiet hæc ſeries 1 : 2 + 1 : 12 + 1 : 30 + 1 : 42 + 1 : 72 + &c. Conferantur porro termini hujus ſeriei cum terminis iſtius 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + &c. Et quamquam idem ſit primus terminus utriuſque ſeriei, reliqui tamen termini prioris ſeriei ſunt manifeſto minores reliquis terminis ſeriei ſecundæ. Quare ſumma ſeriei 1 : 2 + 1 : 12 + 1 : 30 + 1 : 42 + 1 : 72 + &c. minor erit ſumma ſeriei 1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + &c.; adeoque, quum ſumma hujus ſeriei ſit * æqualis unitati, non modo erit finita, verum etiam unitate minor ſumma ſeriei illius.

* art. 624.

V. Sei

oriuntur ex inverſione radicum numerorum naturalium, præclarum hic nobis ſeſe offert paradoxum. In iis enim ſumma ex terminis locorum imparium eſt ad ſummam ex terminis locorum parium, ut eſt radix non diſſimilis binarii, unitate multata, ad ipſam unitatem; adeoque in ratione minoris ad majus. Plane vero, ſi termini locorum imparium ſigillatim conferantur cum terminis locorum parium; eos iſtis manifeſto majores deprehendemus. Sic in ſerie $1 : \surd 1 + 1 : \surd 2 + 1 : \surd 3 + 1 : \surd 4 + 1 : \surd 5 + 1 : \surd 6$ + &c., liquido patet eſſe, & $1 : \surd 1$ majorem, quam $1 : \surd 2$; & $1 : \surd 3$ majorem, quam $1 : \surd 4$; & $1 : \surd 5$ majorem, quam $1 : \surd 6$; atque ita deinceps. Quare oportebit, ut ſumma priorum terminorum major ſit etiam ſumma poſteriorum; quum tamen ſumma illorum ad ſummam iſtorum eſſe debeat in ratione minoris ad majus, hoc eſt, ut $\surd 2 - 1$ ad 1.

684. Novit paradoxum iſtud ipſe hujus theoriæ Auctor Jacobus Bernoullius: qui etſi ejus rationem, ut ipſe ait, ſatis perſpectam habuiſſet; illam tamen cum orbe mathematico nequaquam communicare dignatus eſt. Idem autem paradoxum deprehenditur quoque in *ſerie*, quæ conſtituitur per *inverſionem* numerorum naturalium, nimirum in ſerie harmonica $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + 1 : 6$ + &c. In ea enim ſumma terminorum in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum in locis paribus in ratione æqualitatis; quum tamen ii, ſigillatim cum iſtis comparati, manifeſto majores deprehendantur. Verum in ſerie harmonica paradoxum iſtud, notante ipſo *Bernoullio*, *po-*

tius

tius argumento nobis eſſe poteſt pro infinitate ſummæ ejus adſtruenda. Nam ex eo, quod ſumma terminorum imparium ad ſummam terminorum parium rationem habet æqualitatis, colligere licebit, differentiam inter utramque ſummam evaneſcere relate ad eas: quod non aliter fieri poteſt, niſi ſit infinita, tam ſumma terminorum imparium, quam ſumma terminorum parium.

685. Jam enim notum eſt, finitum evaneſcere relate ad infinitum. Plane vero in ſerie harmonica finitam eſſe differentiam inter ſummam terminorum in locis imparibus, & ſummam terminorum in locis paribus; ſic quidem conjici poteſt. Subducantur etenim termini ſecundæ ſummæ ordine ex terminis primæ. Jamque differentia inter utramque ſummam fiet hæc ſeries $1:2+1:12+1:30+1:42+1:72$ + &c. Conferantur porro termini hujus ſeriei cum terminis iſtius $1:2+1:6+1:12+1:20+1:30+$&c. Et quamquam idem ſit primus terminus utriusque ſeriei, reliqui tamen termini prioris ſeriei ſunt manifeſto minores reliquis terminis ſeriei ſecundæ. Quare ſumma ſeriei $1:2+1:12+1:30+1:42+1:72$ + &c. minor erit ſumma ſeriei $1:2+1:6+1:12+1:20+1:30+$&c.; adeoque, quum ſumma hujus ſeriei ſit * æqualis unitati, non modo erit finita, verum etiam unitate minor ſumma ſeriei illius. * art. 624.

V. *Solutio propoſiti paradoxi, & examen theorematis, unde illud derivatur.*

686. SI vera ſunt, quæ de ſeriebus, ortis per inverſionem poteſtatum, & radicum numerorum naturalium, ex Jacobo Bernoullio ſuperius exhibuimus; jam illud generaliter ſtatuendum eſſet, quod in illiuſmodi ſeriebus ſumma terminorum in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum in locis paribus, ut eſt poteſtas, vel radix binarii non diſſimilis, unitate minuta, ad ipſam unitatem. Et quidem generale iſtud theorema in hunc modum olim oſtendebam. Capiatur ex unoquoque termino ſeriei, de qua agitur, ea pars, quam binarii poteſtas, aut radix non diſſimilis oſtendit. Jamque hac ratione nova orietur ſeries, quæ eos tantum ſeriei prioris terminos continebit, qui in locis paribus exiſtunt. Eſt autem prior ſeries ad hanc aliam, ut prædicta poteſtas, aut radix binarii ad unitatem. Quare, dividendo, ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus erit, ut eadem poteſtas, aut radix *binarii*, unitate multata, ad unitatem.

687. Hac ratione, ſi fiat ſeries ex ipſis numeris naturalibus inverſis, qui ſunt primæ ipſorum, tum poteſtates, cum radices, $1:1+1:2+1:3+1:4+1:5+$ &c., & cujuſque termini capiatur ea pars, quam deſignat ipſe binarius, prodibit hæc altera ſeries $1:2+1:4+1:6+1:8+1:10+$ &c., quæ eos tantum prioris terminos continet, qui in lo-

locis paribus exiſtunt. Unde, quum prior ſeries ſit ad hanc aliam, ut eſt 2 ad 1; erit, dividendo, ut $1:1+1:3+1:5+1:7+1:9+$ &c. ad $1:2+1:4+1:6+1:8+1:10+$&c., ita 1 ad 1. Similiter, ſi fiat ſeries $1:1+1:4+1:9+1:16+1:25+$ &c. ex quadratis inverſis numerorum naturalium, & cujuſque termini capiatur ea pars, quam deſignat quadratum binarii; orietur hæc altera ſeries $1:4+1:16+1:36+1:64+1:100+$ &c., quæ continet dumtaxat terminos prioris ſeriei, exiſtentes in locis paribus. Itaque, quia prior ſeries eſt ad hanc aliam, ut 4 ad 1; erit, dividendo, ut $1:1+1:9+1:25+1:49+1:81+$ &c. ad $1:4+1:16+1:36+1:64+1:100+$ &c., ita 3 ad 1.

688. Eadem omnino ratione, ſi conſtituatur ſeries $1:\sqrt{1}+1:\sqrt{2}+1:\sqrt{3}+1:\sqrt{4}+1:\sqrt{5}+$ &c. ex radicibus quadratis inverſis numerorum naturalium, & cujuſque termini capiatur ea pars, quam deſignat $\sqrt{2}$; habebitur hæc alia ſeries $1:\sqrt{2}+1:\sqrt{4}+1:\sqrt{6}+1:\sqrt{8}+1:\sqrt{10}$ &c., quæ continet eos tantum terminos prioris ſeriei, qui in locis paribus exiſtunt. Unde, quia prior ſeries eſt ad hanc aliam, ut $\sqrt{2}$ ad 1; erit, dividendo, ut $1:\sqrt{1}+1:\sqrt{3}+1:\sqrt{5}+1:\sqrt{7}+1:\sqrt{9}+$ &c. ad $1:\sqrt{2}+1:\sqrt{4}+1:\sqrt{6}+1:\sqrt{8}+1:\sqrt{10}+$ &c., ita $\sqrt{2}-1$ ad 1. Atque ita quoque, ſi conficiatur ſeries $1:\sqrt[3]{1}+1:\sqrt[3]{2}+1:\sqrt[3]{3}+1:\sqrt[3]{4}+1:\sqrt[3]{5}+$ &c. ex radicibus cubicis inverſis numerorum naturalium, & ex unoquoque termino capiatur ea pars, quam deſignat $\sqrt[3]{2}$; prodibit hæc alia ſeries $1:\sqrt[3]{2}+1:\sqrt[3]{4}+1:\sqrt[3]{6}+$

$1:\sqrt[3]{8}$

1 : $\sqrt[3]{8}$ + 1 : $\sqrt[3]{10}$ + &c., quæ continet prioris ſeriei dumtaxat terminos, exiſtentes in locis paribus. Quare, quum prior ſeries ſit ad hanc aliam, ut $\sqrt[3]{2}$ ad 1; erit, dividendo, ut 1 : $\sqrt[3]{1}$ + 1 : $\sqrt[3]{3}$ + 1 : $\sqrt[3]{5}$ + 1 : $\sqrt[3]{7}$ + 1 : $\sqrt[3]{9}$ + &c. ad 1 : $\sqrt[3]{2}$ + 1 : $\sqrt[3]{4}$ + 1 : $\sqrt[3]{6}$ + 1 : $\sqrt[3]{8}$ + 1 : $\sqrt[3]{10}$ + &c., ita $\sqrt[3]{2}$ — 1 ad 1.

689. Sed, re preſſius conſiderata, novi deinceps, demonſtrationem iſtam, utut elegantem, ſuas pati exceptiones. Nam profecto, ubi ex unoquoque termino ſeriei, de qua agitur, ſumitur ea pars, quam binarii poteſtas, aut radix non diſſimilis oſtendit; conſtituitur alia ſeries, eandem habens terminorum multitudinem cum ſerie priore. Quare dici nequit abſolute, quod in ea ii tantum prioris ſeriei termini continentur, qui in locis paribus exiſtunt; quum manifeſtum ſit, iis peragratis, alios totidem deinceps ſubſequi debere. Plane vero, ſi aliorum iſtorum ſumma fiat indefinitæ parvitatis, relate ad ſummam priorum; tunc nihil obſtabit, quo-
* art. 447. minus eos * negligamus, ipſamque ſeriem conſideremus tantum, ut compoſitam ex primis terminis, iiſdem plane cum iis, qui exiſtunt in locis paribus prioris ſeriei. Quod quum *ita ſit*, abunde liquet, allatam demonſtrationem dumtaxat in iſto caſu vim ſuam habere; nec adeo extendendam eſſe ad caſum alterum, quum ſumma reliquorum terminorum non evaneſcit, relate ad ſummam priorum.

690. Jam prior caſus obtinet, quum agitur de ſeriebus, quæ oriuntur, invertendo poteſtates numerorum naturalium. Si enim ſtatuatur
* art. 494. ∞ numerus infinitus, relate ad eum * unitas evane-

neſcet; adeoque, quum ſit, ut n ad 1, ita 1 ad 1 : n; evaneſcet quoq; ralate ad unitatem fractio 1 : n; multoque magis reſpectu ejuſdem unitatis evaneſcent fractiones 1 : n^2, 1 : n^3, 1 : n^4, 1 : n^5, &c. Eſt autem quiſque ex reliquis illis terminis paulo minor aliqua iſtarum fractionum. Quare relate ad unitatem fiet indefinitæ parvitatis, non modo quilibet eorum terminorum, ſed ſumma ipſorum omnium. Obtinet ergo prior caſus in ſeriebus, quæ fiunt per inverſionem poteſtatum numerorum naturalium. Quare in iis habebit vim ſuam allata demonſtratio: & propterea, vi ejus demonſtrationis, concludere licebit, quod in qualibet earum ſerierum ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ut eſt poteſtas non diſſimilis binarii, unitate minuta, ad ipſam unitatem.

691. Alter porro caſus locum habet, quum quæſtio eſt, de ſeriebus, quæ conſtituuntur, invertendo radices numerorum naturalium. Nam, poſito adhuc n numero infinito, evaneſcet quidem relate ad unitatem fractio 1 : n; ſed reſpectu ejuſdem unitatis nulla harum fractionum 1 : $\sqrt{n}$, 1 : $\sqrt[3]{n}$, 1 : $\sqrt[4]{n}$, 1 : $\sqrt[5]{n}$, &c. fiet indefinitæ parvitatis. Eſt autem quiſque ex reliquis illis terminis paulo minor aliqua illarum fractionum. Quare, quum nullus eorum terminorum evaneſcat relate ad unitatem, nec etiam ſumma omnium evaneſcet relate ad ſummam omnium primorum terminorum. Obtinet ergo ſecundus caſus in ſeriebus, quæ fiunt per inverſionem radicum numerorum naturalium. Quare in iis nullius momenti erit allata demonſtratio;

ne-

neque adeo, vi ejus, concludere fas erit, quod in qualibet iſtarum ſerierum ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ut eſt radix non diſſimilis binarii, unitate minuta, ad ipſam unitatem.

692. Relinquitur ſeries harmonica, orta ex inverſione numerorum naturalium, quæ ad utramque earum ſerierum claſſem referri poteſt: quum numeri naturales haberi queant, velut primæ ipſorum, ſive radices, ſive poteſtates. Et quidem in hac ſerie, manente adhuc n numero infinito, unuſquiſque reliquorum terminorum fit paulo minor fractione $1:n$. Plane vero fractio iſta, etſi ſit indefinitæ parvitatis relate ad unitatem, attamen ſi ſumatur toties, quot deſignat ſemiſſis numeri n, æqualis fiet ſemiſſi unitatis. Quare omnes illi reliqui termini ſimul unitatis ſemiſſe minores erunt; & conſequenter ſumma ex iis evaneſcet, relate ad ſummam primorum terminorum, quæ eſt infinita. Hinc relate ad ſeriem harmonicam obtinet prior caſus. Unde habebit in ea vim ſuam allata demonſtratio; atque adeo, ope ejus, tuto concludi poterit, quod in ſerie harmonica ſumma terminorum omnium in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum omnium in locis paribus in ratione æqualitatis.

693. Si ergo de generali illo Bernoullii theoremate ex noſtra demonſtratione dijudicandum eſſet; aſſerere oporteret, verum quidem id eſſe in ſeriebus, ortis ex inverſione, tum numerorum naturalium, cum ſuarum poteſtatum: ſed non item in ſeriebus, quæ fiunt, invertendo

ra-

radices eorundem numerorum. Unde, ſi ita res foret, paradoxum, de quo paulo ante * locuti ſumus, jam non amplius locum haberet; ut quod obtinebat in hypotheſi, quod verum eſſet theorema illud, etiam in ſeriebus, ortis ex radicibus inverſis numerorum naturalium. Sed quoniam illiuſmodi theorema generaliter demonſtravit Jacobus Bernoullius; non abs re erit, Bernoullii demonſtrationem paulo diligentius hoc loco expendere. Nam fieri facile poteſt, ut ipſe etiam Vir clariſſimus aliquid humanitatis in ea paſſus fuerit.

*art. 683.

694. Sane Jacobus Bernoullius, ut ſuperius * vidimus, ſic ſuum theorema generaliter oſtendit. Primo jubet, ut fiant infinitæ ſeries, quarum termini a poteſtatibus, vel radicibus numerorum imparium inverſis decreſcant in ea ratione, quam habet poteſtas, vel radix non diſſimilis binarii ad unitatem. Deinde, velut certum aſſumit, in omnibus hiſce ſeriebus contineri eoſdem plane terminos, qui continentur in ſerie, de qua agitur; adeoque eas ſimul ſeriem ipſam principalem adæquare. Jam horum primum, ut factu poſſibile, ultro quidem admittimus. Sed & alterum ſuam patitur difficultatem. Nam in omnibus illis ſeriebus, præter terminos ſeriei principalis, continentur infinities infiniti alii. Quare tunc tantum omnes illæ ſeries ſimul adæquabunt ſeriem principalem, quum ſumma aliorum terminorum, in iis contentorum, evaneſcit, relate ad ſummam ex terminis primis.

*art. 681.

695. Quod quum ita ſit, perſpicuum eſt, Jacobi Bernoullii demonſtrationem eaſdem pati ex-

exceptiones, quibus noſtra erat obnoxia. Unde, quemadmodum, ope noſtræ demonſtrationis, theorema illud, de quo eſt quæſtio, comperuimus * verum dumtaxat in ſeriebus, ortis ex inverſione, tum numerorum naturalium, cum ſuarum poteſtatum; ſic facile erit, oſtendere, quod ipſa Bernoullii demonſtratio tantummodo relate ad iſtas ſeries theorematis ejus veritatem potis erit evincere. Non ergo obtinet theorema in iis ſeriebus, quæ fiunt, invertendo radices numerorum naturalium. Unde nil mirum cenſeri debet, ſi in hiſce ſeriebus ſinguli termini, exiſtentes in locis imparibus, majores ſint ſingulis terminis, qui extant in locis paribus; quia omnino abhorret a vero, ſummam illorum terminorum eſſe ad ſummam iſtorum in ratione minoris ad majus.

* Art. 693.

VI. Enodatio aliorum paradoxorum, quæ ſunt affinia præcedenti.

696. Affinia ei, de quo mox egimus, plura alia efferre licebit paradoxa, quibus tamen eadem prorſus ratione ſatisfieri debet. Ita in ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. ſi capiatur duplum cujuſque termini, prodibit hæc alia ſeries $2 + 4 + 6 + 8 + 10 +$ &c., quæ dumtaxat terminos, exiſtentes in locis paribus prioris ſeriei, continere videtur. Quare dicendum foret, hanc aliam ſeriem minorem eſſe ſerie priore; quum tamen ex ipſa ejus conſtitutione prioris dupla ſit oporteat. Atque ita quoque, ſi in eadem ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. capiatur tri-

triplum cujuſque termini, orietur hæc alia ſeries $3 + 6 + 9 + 12 + 15 +$ &c., quæ eos ex priore ſerie terminos excerpere videtur, qui tertio quoque loco reperiuntur; quum tamen ejus conſtitutio talis ſit, ut tripla prioris eſſe debeat.

697. Poſſumus quoque, in eadem ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. ſumere quadrata ſuorum terminorum. Et tunc prodibit hæc alia ſeries $1 + 4 + 9 + 16 + 25$ $+$ &c., quæ aliquos prioris ſeriei terminos, valde a ſe mutuo diſſitos, comprehendere videtur. Quare hanc aliam ſeriem multo minorem priore ſtatuere deberemus; quum tamen, per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, ſumma prioris ſeriei ſit ad ſummam ſecundæ ſeriei in eadem omnino ratione, quam habet numerus finitus ad numerum infinitum. Nec ullus erit paradoxorum finis, ſi in ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. capiantur cubi, quadrato-quadrata, tum item poteſtates aliæ ſuperiores ſuorum terminorum; & ex iis novæ adhuc ſeries conſtituantur.

* art. 599.

698. Omnium ergo horum paradoxorum ſolutio exinde repeti debet, quod ubi ex ſerie numerorum naturalium eruitur alia ſeries, capiendo, ſive multiplices, ſive poteſtates ſuorum terminorum, plane falſum eſt, hanc aliam ſeriem tantum terminos nonnullos ſeriei prioris continere; quandoquidem ex ipſa ejus formatione tot præciſe terminos contineat oportet, quot exiſtunt in ipſa ſerie numerorum naturalium. Sed difficultas hic oritur, circa poſſibilitatem aliorum iſtorum terminorum. Jam enim ſeries numerorum naturalium, continuata ad eum uſ-

que numerum, qui pro infinito debet haberi, ulterius progredi non poteſt. Plane vero, ſi in aliis illis ſeriebus, quæ oriuntur, capiendo numerorum naturalium, ſive multiplices, ſive poteſtates, continerentur termini alii, non contenti in ſerie numerorum naturalium; hanc quoque ultra numerum infinitum liceret extendere.

699. Interim huic difficultati facile quidem erit occurrere. Numeri enim naturales oriuntur per continuam unitatis additionem. Sed unitas iſta poteſt nobis quamcumque rem exhibere. Licebit ergo, unitate illa repræſentare, tam palmum, exempli gratia, quam ulnam, quæ ex octo componitur palmis. Utroque caſu ſubinde ad infinitum uſque progreditur ſeries, ut eadem ſit ſemper multitudo ſuorum terminorum, & iidem numeri, quibus ſeriei termini ſunt notandi. Sed omne diſcrimen in eo ſitum eſt, quod quilibet ſeriei terminus unitatibus ſuis in priore caſu tot palmos, in ſecundo vero caſu ulnas totidem nobis repræſentat. Unde, ſi duæ hujuſmodi ſeries conſiderentur in abſtracto, hoc eſt, non habita ratione rei, quam unitas deſignat, eædem plane erunt inter ſe; different vero a ſe mutuo, quum conſiderantur in concreto, & rei, quam unitas exhibet in quaque ſerie, ratio velit haberi.

700. Ad eundem itaque modum in ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c. licebit, ſumere duplum, triplum, quadruplum, aut alium quemvis multiplicem cujuſq; termini. Verum, id agentes, non aliud efficimus, quam augere in eadem ratione valorem unitatis, per quam numerorum naturalium ſeries conſtituitur. Unde novæ ſeriei termini, tam multitudine, quam no-

ta-

tatione, cenſendi ſunt iidem cum terminis ſeriei prioris; & omne diſcrimen inter eos non aliunde eſt repetendum, quam ex diverſitate valorum, quos unitas habet in utraque ſerie. Quod luce clarius apparebit, ſi ipſa ſeries numerorum naturalium exhibeatur in hunc modum 1 . 1 + 2 . 1 + 3 . 1 + 4 . 1 + 5 . 1 + &c. Nam hac ratione exhibenda erit per 1 . 2 + 2 . 2 + 3 . 2 + 4 . 2 + 5 . 2 + &c. ſeries, quæ oritur, capiendo duplum cujuſque termini illius; per 1 . 3 + 2 . 3 + 3 . 3 + 4 . 3 + 5 . 3 + &c. ſeries, quæ conſtituitur, capiendo triplum; atque ita deinceps.

701. Quantum ad ſeries, quæ oriuntur, capiendo in ſerie numerorum naturalium datam cujuſque termini poteſtatem; eæ etiam, & multitudine, & notatione ſuorum terminorum, cenſendæ ſunt eædem cum ſerie ipſa numerorum naturalium; diſcrimen vero exinde eſt deducendum, quod relate ad eos valor unitatis in quoque termino ſuum ſubit incrementum. Nec aliter ſe rem habere, hic etiam liquido patebit, ſi ipſa numerorum naturalium ſeries in hunc modum exhibeatur 1 . 1 + 2 . 1 + 3 . 1 + 4 . 1 + 5 . 1 + &c. Ita enim oportebit, exhibere per 1 . 1 + 2 . 2 + 3 . 3 + 4 . 4 + 5 . 5 + &c. ſeriem, quæ oritur, capiendo quadratum cujuſque termini illius; per 1 . (1 . 1) + 2 . (2 . 2) + 3 . (3 . 3) + 4 . (4 . 4) + 5 . (5 . 5) + &c. ſeriem, quæ producitur, capiendo cubum; atque ita de aliis.

702. Ex ſerie numerorum naturalium aliæ erui poſſunt, capiendo, ſive datas aliquas partes, ſive radices aliquas ex terminis ejus. Et iſtæ pariter, tam multitudine, quam notatione termi-

norum, eædem cenſendæ ſunt cum ſerie ipſa numerorum naturalium. Nec aliunde, quam a valore unitatis, diſcrimen, inter eas exiſtens, eſt repetendum. Nam profecto, exhibita ſemper in hunc modum $1 . 1 + 2 . 1 + 3 . 1 + 4 . 1 + 5 . 1$ + &c. ſerie numerorum naturalium; exhibenda erit per $1 . (1 : 2) + 2 . (1 : 2) + 3 . (1 : 2) + 4 . (1 : 2) + 5 . (1 : 2)$ + &c. ſeries, quæ orietur, capiendo ſemiſſem cujuſque termini illius; & per $1 . (1 : \sqrt{1}) + 2 . (1 : \sqrt{2}) + 3 . (1 : \sqrt{3}) + 4 . (1 : \sqrt{4}) + 5 . (1 : \sqrt{5})$ + &c. ſeries, quæ conſtituitur, capiendo cujuslibet termini radicem quadratam.

703. Hinc, ſi valores, quos habet unitas in ſingulis ſeriei terminis, deſignentur litteris a, b, c, d, e, &c.; poterunt omnes hujuſmodi ſeries ſub generali iſta comprehendi $1 . a + 2 . b + 3 . c + 4 . d + 5 . e$ + &c. Atque hac ratione liquido patet, non modo eandem eſſe in ſingulis hiſce ſeriebus multitudinem terminorum; ſed nec etiam differre eas a ſe mutuo, notatione eorundem terminorum, ſi earum litterarum, quæ valores unitatis in ſingulis terminis repræſentant, nulla ratio velit haberi. Unde, ſi quod diſcrimen intercedit inter hujuſmodi ſeries, id totum ex multiplici valore, quem unitas habere poteſt, vel in ipſis ſeriebus, vel in ſingulis ipſarum terminis, repeti debet.

704. Cæterum nolo hic reticere, quod eadem difficultas erui quoque poteſt ex ſeriebus numerorum figuratorum. Ipſa enim harum ſerierum conſtitutio illud præſeferre videtur, ut in iis quamplures alii contineantur numeri, omnino non contenti in ſerie numerorum natura-

lium

lium. Unde, cur per hoſce alios numeros etiam iſta ſeries non excurrat, plane difficultatem facit. Sed facile quoque erit oſtendere, quod ipſæ figuratorum ſeries tantum pro vario valore, quem in iis unitas ſubit, differunt a ſerie numerorum naturalium; adeoque, quod ſunt eædem inter ſe, tam multitudine, quam notatione terminorum, quotieſcumque diverſi ejus valoris, quem unitas patitur, nulla ratio velit haberi.

705. Plane enim in ſerie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$ &c., ſicuti prior terminus ſignificat rem unicam, ita ſecundus deſignat res duas, tertius tres, quartus quatuor, atque ita deinceps. Unde, ſi litteris diverſis omnes haſce res repræſentemus, fiet $1 . a$ primus ejuſdem ſeriei terminus, $1 . b + 1 . c$ terminus ſecundus, $1 . d + 1 . e + 1 . f$ terminus tertius, $1 . g + 1 . h + 1 . i + 1 . k$ terminus quartus, $1 . l + 1 . m + 1 . n + 1 . o + 1 . p$ terminus quintus, atque ita de aliis. Qua ratione ipſa numerorum naturalium ſeries exhiberi poterit in hunc modum $1 . a + (1 . b + 1 . c) + (1 . d + 1 . e + 1 . f) + (1 . g + 1 . h + 1 . i + 1 . k) + (1 . l + 1 . m + 1 . n + 1 . o + 1 . p) +$ &c.

706. Jam, ſi in ſerie iſta generali pro ſingulis litteris ſcribatur 1; revera orietur ipſa ſeries numerorum naturalium. Sed, ſi pro litteris cujuſque termini ſcribantur totidem numeri naturales, ab unitate ſe ſemper excipientes; tunc prodibit ſeries numerorum, qui conſtituunt primum ordinem figuratorum primi generis. Et, ſi pro iis ſcribantur totidem horum figuratorum, ſemper ab initio ſumpti; emerget ſeries numerorum, qui in eodem primo genere conſtituunt ſecun-

dum ordinem figuratorum; atque ita deinceps. Unde clare liquet, diſcrimen inter iſtiuſmodi ſeries oriri etiam ex multiplici valore, quem unitas ſubit in ſingulis partibus cujuſque termini.

707. Serierum ergo, quas modo contemplati ſumus, tres claſſes ſtatui poſſunt. Prima enim ſeries illas continet, quæ oriuntur, capiendo multiplices, aut partes numerorum naturalium. Secunda complectitur eas ſeries, quæ conſtituuntur, capiendo poteſtates, aut radices eorundem numerorum. Et tertia demum ipſas figuratorum numerorum ſeries comprehendit. Singulæ cujuſque claſſis ſeries non alia ratione differunt a ſerie numerorum naturalium, quam, quia unitas, relate ad eas, alios ſubit valores ab eo, quem habet in ipſa numerorum naturalium ſerie. Interim hæc valoris mutatio, quam unitas patitur, non eſt ejuſdem indolis in omnibus ſeriebus.

708. Plane enim in qualibet ſerierum primæ claſſis ſubit quidem unitas valorem alium, ſed eum retinet eundem, ac immutatum in ſingulis ſeriei terminis. At vero in unaquaqne ſerierum ſecundæ claſſis unitas valorem mutat in quolibet ſeriei termino, & nonniſi in partibus ejus illum retinet eundem, ac invariatum. Denique in ſingulis ſeriebus tertiæ claſſis valor unitatis mutationi ſubjacet, non modo in terminis omnibus ſerierum, verum etiam in partibus ſingulis eorum terminorum. Quæ quum ita ſint, liquet, ſeries primæ claſſis retinere quidem indolem, ac naturam ſeriei numerorum naturalium; ſed non item ſeries alias, quæ ad claſſes duas poſtremas referuntur.

709.

709. Seriei namque numerorum naturalium ea quidem eſt indoles, atque natura, ut unitas, a qua ea trahit initium ſuum, & per cujus continuam additionem in infinitum promovetur, eadem ſemper maneat, ac immutata. Id vero in ſeriebus primæ claſſis adhuc obtinet. Nam in iis unitas ita quidem mutat valorem ſuum, ut tamen in ſingulis terminis maneat idem, ac invariatus. Sed non perinde eſt in ſeriebus, tum ſecundæ, cum tertiæ claſſis. Enim vero in iis mutatur valor unitatis in ſingulis ſerierum terminis; in iſtis autem mutationi eſt obnoxius, non modo in terminis omnibus, verum etiam in ſingulis partibus cujuſque termini.

710. Ex eo autem, quod in ſeriebus primæ claſſis unitatis valor manet idem, ac immutatus in ſingulis terminis, fit, ut ſumma terminorum quotcumque cujuſque earum ſerierum ſit ad ſummam terminorum totidem ſeriei numerorum naturalium, ut eſt valor, quem habet unitas in illa ſerie, ad valorem ejus naturalem. Unde, ſi valor unitatis ſit a, erit $(m^2+m)a:2$ ſumma tot terminorum, quot deſignat numerus m; quandoquidem ſumma ex totidem terminis ſeriei numerorum naturalium inventa eſt ſuperius * $(m^2+m):2$. Et quoniam, ſi m ſtatuatur numerus infinitus, eadem ſumma fit ſimpliciter $m^2a:2$; liquet, in hiſce etiam ſeriebus ſummam terminorum omnium eſſe ad ſummam terminorum totidem, æqualium maximo, in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2.

* art. 590. 594.

SECTIO IV.

De Generali Poteſtatum Theoria.

711. ABſoluto calculo ſerierum infinitarum, earundemq; theoria paulo fuſius expenſa, quam prioris hujus libri noſtrorum Algebræ elementorum ratio pati videbatur; reliquum modo eſt, ut poteſtatum theoriam ad ſuam univerſalitatem revocemus. Univerſaliorem autem reddemus theoriam iſtam duplici quidem ratione. Primo nempe, conſiderando, præter poteſtates vulgares, de quibus jam ſuperius locuti ſumus, plures alias poteſtatum ſpecies, vulgo Algebriſtarum antehac incognitas. Deinde, generalem quandam formulam afferendo, cujus ope quælibet quantitas compoſita ad quamcumque ex iis poteſtatibus nullo negotio evehi poſſit.

712. Hac formula mediante, immenſus ille calculus, & ſummo tædio plenus, quem in conficiendis ſeriebus infinitis, ſive per diviſionem, ſive per radicum extractionem, ſuperius experti ſumus, omnino removetur. Sed ejuſdem formulæ beneficio liquido etiam patebit veritas ejus, quod ſupra*dictum eſt: nimirum, quod certa, ac definita lege in infinitum abeunt, non modo termini earum ſerierum, quæ ex diviſione oriuntur; verum etiam termini illarum, quæ ab extractione radicum trahunt originem ſuam. Unde, quanto pretio iſtiuſmodi formula ſit habenda, ſatis pro dignitate enarrare non licet.

*art. 563.

CA-

CAPUT I.

Variæ poteſtatum ſpecies explicatæ.

713. POteſtatem ſuperius * appellavimus id, quod producitur, quum quantitas aliqua ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & indicem, ſeu exponentem poteſtatis diximus numerum illum, adſcriptum a tergo quantitati, qui deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Jam in poſterum vocabimus poteſtatem, omnem quantitatem, cui a tergo numerus aliquis ſit adſcriptus; & ſimiliter dicemus exponentem, ſeu indicem poteſtatis, numerum illum, quem quantitas adſcriptum habet a tergo. * art. 76.

714. Juxta hanc poteſtatis definitionem, non minus dicenda erit poteſtas quantitas illa, cujus exponens eſt numerus integer; quam ea, cujus exponens eſt numerus fractus. Et ſimiliter non minus merebitur nomen poteſtatis quantitas, quæ habet pro ſuo indice numerum poſitivum; quam, quæ pro exponente habet numerum negativum. Unde perſpicuum eſt, poteſtates omnes bifariam dividi poſſe: primo nempe in poſitivas, & negativas; deinde vero in perfectas, & imperfectas.

715. Plane enim, quæ exponentes habent poſitivos, poteſtates erunt poſitivæ; quæ vero negativos, negativæ. Et eadem ratione poteſtates illæ, quarum exponentes ſunt numeri integri, poteſtates erunt perfectæ; eæ vero, qua-

rum

rum exponentes ſunt numeri fracti, poteſtates erunt imperfectæ. Sic a^2, a^3, a^4, &c. poteſtates ſunt perfectæ poſitivæ; ſed a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. ſunt poteſtates perfectæ negativæ. Atque ita quoque $a^{1:2}$, $a^{2:3}$, $a^{3:4}$, &c. poteſtates ſunt imperfectæ poſitivæ; ſed $a^{-1:2}$, $a^{-2:3}$, $a^{-3:4}$, &c. ſunt poteſtates imperfectæ negativæ.

I. *Natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ.*

716. Ut natura earum omnium poteſtatis ſpecierum, quas modo * recenſuimus, rectius intelligatur, explicanda eſt prius natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ; tum item analogia eſt oſtendenda, quæ inter utramque progreſſionem intercedit. Ut vero rem paulo altius repetamus, notabimus primo, quantitates inter ſe mutuo duplici quidem ratione poſſe comparari: primo nempe ratione exceſſus, vel defectus; & deinde ratione continentiæ.

* art. 714. 715.

717. Conſeruntur duæ quantitates, ratione exceſſus, vel defectus, quum quæritur, quantum una excedit alteram, vel ab altera deficit. Conferuntur vero, ratione continentiæ, quum quæritur, quoties una continet alteram, vel in altera continentur. Ita duo numeri 2, & 6 dicentur collati inter ſe mutuo, ratione exceſſus, vel defectus, quum notatur numerus 4, per quem primus deficit a ſecundo, vel ſecundus excedit primum; dicentur vero collati, ratione continentiæ, quum notatur numerus 3, qui oſtendit, quoties primus continetur in ſecundo,

vel

vel ſecundus continet primum.

718. Quocumque ex his modis duæ quantitates conferantur inter ſe invicem, ipſa quantitatum comparatio rationis vocabulo ſemper deſignabitur. Sed, ob duplicem modum, quo conferri poſſunt quantitates inter ſe mutuo, duplex etiam diſtinguitur ſpecies rationis; & una, quæ dicitur arithmetica, quantitates comparat ratione exceſſus, vel defectus; altera, quæ vocatur geometrica, confert quantitates ratione continentiæ.

719. Duæ porro quantitates, quæ in qualibet ratione, ſive arithmetica, ſive geometrica, conferuntur ad invicem, vocantur communiter termini ipſius rationis. Et ſpeciatim dicitur antecedens, prior terminus, qui confertur; & vocatur conſequens, terminus ſecundus, cum quo prior comparatur. Sed uſu etiam receptum eſt, ut haberetur antecedens, velut terminus excedens, vel continens; & viciſſim haberetur conſequens, velut terminus deficiens, vel contentus.

720. Jam in ratione arithmetica vocatur exponens rationis quantitas illa, quæ deſignat, quantum antecedens conſequentem ſuum excedit. Et liquido patet, haberi hunc exponentem, quotieſcumque conſequens ex antecedente ſubducitur. Unde in ratione arithmetica, quam habet a ad b, exponens ipſius rationis erit $a - b$; quandoquidem, ſi ſubducatur conſequens b ex antecedente a, reſiduum fiet $a - b$.

721. Hinc, ſi alicujus rationis arithmeticæ habeatur, tum exponens, cum terminus primus; invenietur terminus ſecundus, ſubducendo exponentem ex termino primo. Ita, ſi ex-

ſi exponens ſit b, & terminus primus ſit a; erit terminus alter $a - b$. Sed, ſi una cum exponente habeatur viciſſim terminus ſecundus; tunc invenietur terminus primus, addendo exponentem cum ſecundo termino. Qua ratione, ſi exponens ſit b, & terminus ſecundus ſit a; fiet $a + b$ terminus primus.

722. In ratione autem geometrica vocatur exponens rationis quantitas illa, quæ deſignat quoties antecedens continet conſequentem. Et perſpicuum eſt, haberi hunc exponentem, quotieſcumque antecedens per conſequentem dividitur. Unde in ratione geometrica, quam habet a ad b, exponens ipſius rationis erit $a : b$; quandoquidem, ſi dividatur antecedens a per conſequentem b, quotiens fiet $a : b$.

723. Hinc, ſi alicujus rationis geometricæ habeatur, tum exponens, cum teminus primus; invenietur terminus ſecundus, dividendo priorem terminum per exponentem. Ita, ſi exponens ſit b, & terminus primus ſit a; erit terminus alter $a : b$. Sed, ſi una cum exponente habeatur viciſſim terminus ſecundus; tunc invenietur terminus primus, multiplicando ſecundum terminum per exponentem. Qua ratione, ſi exponens ſit b, & terminus ſecundus ſit a; fiet ab terminus primus.

724. Præterea duæ rationes, ſive arithmeticæ, ſive geometricæ, dicuntur æquales inter ſe, quum æquales ſunt exponentes ipſarum. Ita ratio arithmetica, quam habet a ad b, dicetur æqualis rationi arithmeticæ, quam habet c ad d;
*art. 720. ſi quantitates duæ $a - b$, & $c - d$, quæ ſunt * exponentes earum rationum, æquales fuerint

in-

inter ſe. Et ad eundem modum, ſi fuerint æquales inter ſe fractiones duæ $a:b$, & $c:d$; ratio geometrica, quam habet a ad b, dicetur æqualis rationi geometricæ, quam habet c ad d.

725. Duarum autem rationum æqualitas vocatur communiter proportio. Unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, quum ratio, quam habet prima ad ſecundam, eſt æqualis rationi, quam habet tertia ad quartam. Sed & ipſa proportio alia erit arithmetica, alia geometrica. Nam æqualitas duarum rationum arithmeticarum dicetur proportio arithmetica; æqualitas vero duarum rationum geometricarum proportio geometrica appellabitur.

726. Jam proportionis arithmeticæ illud eſt accidens præcipuum, ut ſumma extremorum æqualis ſit ſummæ mediorum. Eſto enim a primus terminus proportionis arithmeticæ, & c terminus tertius; ſitque etiam b exponens utriuſque rationis, hoc eſt exceſſus, quo, tum primus terminus ſuperat ſecundum, cum tertius ſuperat quartum. Itaque erit * $a-b$ terminus ſecundus, & $c-b$ terminus tertius. Unde, quum a, $a-b$, c, $c-b$ ſint quatuor termini proportionis arithmeticæ; liquet, ſummam extremorum $a+c-b$ æqualem eſſe ſummæ mediorum $a-b+c$. *art. 721.

727. Proportionis autem geometricæ ea eſt proprietas præcipua, ut productum extremorum æquale ſit producto mediorum. Ponatur enim, quod a ſit primus terminus proportionis geometricæ, & c terminus tertius; & ponatur quoque, quod b ſit exponens utriuſque rationis, hoc eſt quantitas, deſignans, quoties primus terminus

con-

continet ſecundum,& tertius continet quartum.
*Art.723. Itaque erit * $a : b$ terminus ſecundus,& $c : b$ terminus quartus. Unde,quum a, $a : b$, c, $c : b$ ſint quatuor termini proportionis geometricæ ; liquet, productum ex extremis $ac : b$ æquale eſſe producto ex mediis $ac : b$.

728. Tam arithmetica, quam geometrica proportio quatuor terminos exigit ; quum utraque ſit æqualitas duarum rationum,quarum unaquæque duos terminos requirit.Sed poteſt etiam quælibet proportio ſub tribus tantum terminis conſiſtere : ſcilicet, quum terminus medius bis ſumitur, & gerit vices conſequentis in prima ratione, & vices antecedentis in ſecunda. Id quum accidit, proportio dicitur continua.Et perſpicuum eſt, in proportione continua arithmetica ſummam extremorum æqualem eſſe duplo termini medii; in proportione continua geometrica productum extremorum æquale eſſe quadrato, quod fit ex termino medio.

729. Quum non tres, ſed plures habentur quantitates continue proportionales, dicentur eæ progreſſionem conſtituere. Atque hæc rurſus erit, vel arithmetica, vel geometrica : prout nempe quantitates, progreſſionem conſtituentes, ſunt vel arithmetice, vel geometrice proportionales. Ita ſeries numerorum 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, &c.conſtituit progreſſionem arithmeticam; quia idem eſt ubiq;exceſſus.Per contrarium vero ſeries numerorum 64, 32, 16, 8, 4, 2, &c. conſtituit progreſſionem geometricam ; quia eadem eſt ubique continentia.

730. Inter terminos ergo progreſſionis arithmeticæ idem ubique ſervatur exceſſus, &

quan-

quantum primus excedit ſecundum, tantundem ſecundus excedit tertium, tertius excedit quartum, atque ita deinceps. Unde, ſi in hujuſmodi progreſſione b ſit exponens, & a terminus primus; erit * $a - b$ ſecundus terminus, $a - 2b$ terminus tertius, $a - 3b$ terminus quartus, atque ita in infinitum. Qua ratione progreſſionis arithmeticæ termini omnes ſic poterunt exhiberi $a, a - b, a - 2b, a - 3b, a - 4b, a - 5b, a - 6b$, &c. *Art. 721.

731. Inter terminos autem progreſſionis geometricæ eadem ubique ſervatur continentia, & quoties primus continet ſecundum, toties ſecundus continet tertium, tertius continet quartum, atque ita deinceps. Unde, ſi in hujuſmodi progreſſione b ſit exponens, & a terminus primus; erit * $a : b$ ſecundus terminus, $a : b^2$ terminus tertius, $a : b^3$ terminus quartus, atque ita in infinitum. Qua ratione progreſſionis geometricæ termini omnes ſic poterunt efferri a, $a : b$, $a : b^2$, $a : b^3$, $a : b^4$, $a : b^5$, $a : b^6$, &c. *Art. 723.

732. Ex quibus modo facile erit intelligere, quæ ſint utriuſq; progreſſionis proprietates principaliores. Nimirum in progreſſione arithmetica evidens eſt, hæc duo eſſe accidentia precipua. Primum, ut ſumma duorum quorumvis terminorum equalis ſit ſummæ ex duobus aliis, equaliter hinc inde diſtantibus ab iis. Alterum, ut duplum unius termini adæquet ſummam duorum aliorum, qui utrinque æque diſtent ab eo.

733. In progreſſione autem geometrica, perſpicuum eſt, has duas eſſe proprietates præcipuas. Prima, ut productum ex duobus quibuſlibet terminis æquale ſit ei, quod producitur ex

mutua multiplicatione duorum aliorum, utrinque ab iis æqualiter diſtantium. Altera, ut quadratum unius termini æquale ſit ei, quod oritur, multiplicando per ſe invicem duos alios terminos, qui æqualiter hinc inde diſtent ab illo.

734. Cæterum nolo hic reticere, quod utraque progreſſio poteſt eſſe, tum creſcens, cum decreſcens. Ita termini progreſſionis arithmeticæ a, $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, $a-4b$, &c. fient 20, 17, 14, 11, 8, &c., ſi a ſit 20, & b ſit 3; fient vero 20, 23, 26, 29, 32, &c., ſi exhibente a numerum 20, ponatur b æqualis -3. Atque ita quoque termini progreſſionis geometricæ a, $a:b$, $a:b^2$, $a:b^3$, $a:b^4$, &c. evadent 32, 16, 8, 4, 2, &c., ſi a ſit 32, & b ſit 2; evadent vero 32, 64, 128, 256, 512, &c., ſi exhibente a numerum 32, ponatur b æqualis fractioni huic $1:2$.

735. Eſt autem notatu dignum, quod ubi progreſſio eſt geometrica, ea, tum creſcendo, cum decreſcendo progreditur ſemper per terminos poſitivos; quotieſcumque vero progreſſio eſt arithmetica, ea, creſcendo quidem, promovetur in infinitum per terminos poſitivos; decreſcendo vero, non aliter abire poteſt in infinitum, quam per terminos negativos. Atque hinc eſt, ut in progreſſione arithmetica decreſcente poteſt quidem aliquis ejus terminus evaneſcere, & fieri æqualis zero, ſeu nihilo; ſed non item in progreſſione geometrica decreſcente, ubi omnis ejus terminus ſemper valorem aliquem contineat oportet.

II. Ana-

II. Analogia inter progreſſionem arithmeticam, & geometricam.

736. OStenſa natura progreſſionis, tum arithmeticæ, cum geometricæ; oſtendenda eſt modo analogia, quæ inter utramque progreſſionem intercedit. Hæc potiſſimum conſiſtit in eo, quod, quemadmodum termini progreſſionis arithmeticæ inveniuntur additione, & ſubtractione; ita termini progreſſionis geometricæ multiplicatione, & diviſione debent reperiri. Verum ex iſta analogia plura colligi poſſunt conſectaria, quæ recenſitis poteſtatum ſpeciebus explicandis non parum conducent.

737. Aſſumantur etenim termini progreſſionem arithmeticam conſtituentes, velut indices, ſeu exponentes eorum, qui conſtituunt progreſſionem geometricam. Jamque illud ſtatui primo loco poteſt, quod, ſi in progreſſione geometrica capiantur quatuor termini geometrice proportionales; eorundem exponentes tales eſſe debent, ut ſumma ex exponentibus extremorum adæquet ſummam ex exponentibus mediorum. Neque vero difficile id erit oſtendere.

738. Nam ex hypotheſi exponentes eorum terminorum ſunt termini totidem arithmetice proportionales. Sed quatuor terminorum arithmetice proportionalium illud eſt * accidens præcipuum, ut ſumma extremorum æqualis ſit ſummæ mediorum. Itaque, ſi capiantur in progreſſione geometrica quatuor termini geometrice proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum æqualis erit ſummæ ex exponentibus mediorum.

* art. 726.

739. Eadem hypotheſi manente, ſtatui ſecundo loco poteſt, quod, ſi in eadem progreſſione geometrica capiantur tres termini geometrice proportionales, adeo nempe, ut prior terminus ſit ad ſecundum, veluti eſt ſecundus ad tertium; eorundem exponentes tales eſſe debent, ut ſumma ex exponentibus extremorum adæquet duplum exponentis termini medii.

740. Nam ex hypotheſi exponentes trium illorum terminorum ſunt termini totidem arithmetice proportionales. Sed trium terminorum arithmetice proportionalium ea * eſt proprietas præcipua, ut ſumma extremorum æqualis ſit duplo termini medii. Itaque, ſi in progreſſione geometrica capiantur tres termini geometrice proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum æqualis erit duplo exponentis termini medii.

* art. 738.

741. Quod ſi autem progreſſio geometrica ab unitate trahat initium ſuum, tum item progreſſio arithmetica incipiatur a zero, ita, ut ipſum zero ſit index, ſeu exponens unitatis; licebit, ex duabus iis utriuſque progreſſionis ſimul junctæ proprietatibus alias etiam derivare, quarum ope facile erit, ſuper terminis progreſſionis geometricæ additione, & ſubtractione peragere quæcumque multiplicatione, & diviſione eſſent peragenda.

742. Primo namque, ſi multiplicandi ſunt per ſe mutuo duo quilibet termini progreſſionis geometricæ; ſatis erit, exponentes eorum terminorum in unum addere, & velut productum habere terminum illum, qui eam ſummam habet pro ſuo exponente. Enim vero generaliter quum

quum tales ſunt ambæ progreſſiones ; quales paulo ante * eas ſuppoſuimus ; ſumma ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris, exponenti ipſius producti æqualis eſſe debet. *art.741.

743. Oſtendemus autem generalis hujus regulæ veritatem in hunc modum. Ex multiplicationis definitione, unitas eſt ad multiplicatorem in eadem ratione geometrica, quam habet multiplicandus ad productum. Quare ex oſtenſis * ſumma ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris æqualis erit ſummæ ex exponentibus unitatis, & producti. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero. Itaque ſumma ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris ſolius producti exponentem adæquabit. *art.737.

744. Secundo, ſi dividendi ſunt per ſe mutuo duo quilibet termini progreſſionis geometricæ ; ſatis erit, ex exponente termini dividendi ſubducere exponentem alterius termini, qui gerit vices diviſoris, & velut quotientem habere terminum, qui illud reſiduum habet pro ſuo exponente. Nam generaliter, quum tales ſunt progreſſiones, quales ſuperius * eas ſuppoſuimus; differentia exponentium dividendi, & diviſoris æqualis eſſe debet exponenti ipſius quotientis. *art.741.

745. Hujus vero generalis canonis veritas ſic poterit oſtendi. Ex definitione diviſionis, diviſor eſt ad dividendum in eadem ratione geometrica, quam habet unitas ad quotientem. Quare ex oſtenſis * ſumma ex exponentibus diviſoris, & quotientis æqualis erit ſummæ ex exponentibus dividendi, & unitatis. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero. Itaque ſumma exponentium diviſoris, & quotientis æ- *art.737.

qualis erit exponenti ſolius dividendi: & propterea, ſi ex exponente dividendi ſubducatur exponens diviſoris, remanebit exponens quotientis.

746. Tertio, ſi aliquis terminus progreſſionis geometricæ elevari debet ad quadratum, cubum, aut aliam quamvis poteſtatem altiorem; ſatis erit, exponentis illius termini ſumere duplum, triplum, quadruplum, &c., & velut quæſitam poteſtatem habere terminum, qui eum multiplicem pro ſuo exponente habet. Nam generaliter, ubi utraque progreſſio eſt talis, qualis

*art.741. ſuperius * poſita eſt; duplum exponentis lateris dabit exponentem quadrati; triplum, exponentem cubi; quadruplum, exponentem quadratoquadrati; atque ita deinceps.

747. Neque vero difficile erit, generalis hujus regulæ veritatem oſtendere. Nam, quum quadratum oriatur, multiplicando latus per ſe ipſum; erunt unitas, latus, & quadratum in

*art.739. geometrica proportione. Quare ex oſtenſis * ſumma ex exponentibus unitatis, & quadrati æqualis erit exponenti lateris duplicato. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero. Itaque exponens ſolius quadrati duplum exponentis lateris adæquabit.

748. Eadem ratione, quia cubus oritur, multiplicando latus per quadratum; erunt unitas, latus, quadratum, & cubus in geometrica pro-

*art.737. portione. Quare ex oſtenſis * ſumma ex exponentibus unitatis, & cubi æqualis erit ſummæ ex exponentibus lateris, & quadrati. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero; & in

*art.747. hac eadem hypotheſi exponens quadrati eſt * æqualis exponenti lateris duplicato. Itaque ex-

po-

pones ſolius cubi triplum exponentis lateris adæquabit.

749. Non diſſimiliter res oſtendetur de poteſtatibus altioribus. Nam quadrato-cubus, exempli gratia, oritur ex ductu quadrati per cubum. Quare unitas ad quadratum erit in eadem ratione geometrica, quam habet cubus ad quadrato-cubum: proindeque ex oſtenſis * ſumma ex exponentibus unitatis, & quadrato-cubi æqualis erit ſummæ ex exponentibus quadrati, & cubi. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero; & in hac eadem hypotheſi exponens quadrati adæquat * duplum, & exponens cubi adæquat * triplum exponentis, qui refertur ad latus. Itaque exponens ſolius quadrato-cubi quintuplum exponentis lateris adæquabit. *art.737. *art.767. *art.748.

750. Denique, ſi ex aliquo termino progreſſionis geometricæ extrahenda eſt radix quadrata, cubica, aut alterius cujuſvis ordinis; ſatis erit, exponentis illius termini ſumere ſemiſſem, trientem, quadrantem, &c., & velut quæſitam radicem habere terminum, qui eam partem aliquotam habet pro ſuo exponente. Nam generaliter, quum utraque progreſſio eſt talis, qualis ſuperius * a nobis poſita eſt; ſemiſſis exponentis alicujus quantitatis erit æqualis exponenti ſuæ quadratæ radicis, triens exponenti ſuæ radicis cubicæ; quadrans exponenti ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps. *art.741.

751. Oſtendetur vero generalis hic canon in hunc modum. Quum progreſſio geometrica incipit ab unitate, & exponens unitatis eſt zero, ſeu nihil; jam quidem oſtenſum eſt *, duplum exponentis lateris exhibere nobis expo- *art.746.

nentem quadrati, triplum exponentem cubi, quadruplum exponentem quadrato-quadrati, atque ita in infinitum. Quare per contrarium omnino neceſſe eſt, ut in eadem hypotheſi ſemiſſis exponentis datæ quantitatis adæquet exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, quadrans exponentem ſuæ radicis quadrato quadratæ, atque ita de aliis.

III. Natura poteſtatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ.

752. Cognita analogia, quæ exiſtit inter progreſſionem arithmeticam, & progreſſionem geometricam; haud difficile modo erit, naturam poteſtatum omnium intelligere. Et quidem jam vidimus ſupra *, quatuor dari poſſe poteſtatum ſpecies, nimirum perfectas poſitivas, perfectas negativas, imperfectas poſitivas, & imperfectas negativas. Quum ergo poteſtates perfectæ poſitivæ jam ſatis ſuperque ſuperius explicatæ ſint; videamus modo, quæ ſit natura earum poteſtatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ, & qua ratione eæ a perfectis poſitivis diſtinguantur.

* *art. 715.*

753. Circa poteſtates perfectas poſitivas, quæ habent pro ſuis exponentibus numeros integros, eoſque poſitivos, jam illud ſupra * ſtatuimus, eas exponentibus ſuis deſignare, quoties quantitas per multiplicationem poni debet: ita nempe, ut a, ſeu a^1 deſignet ipſam quantitatem a ſemel poſitam; a^2 eandem quantitatem a poſitam bis, hoc eſt productum, quod oritur, multiplicando a per ſe ipſam; a^3 eandem adhuc

* *art. 76.*

quan-

quantitatem a poſitam ter, ſive etiam productum ex a^2 per a; atque ita de aliis.

754. Inde vero liquet, poteſtates perfectas poſitivas, ſi ordine ſcribantur, progreſſionem geometricam conſtituere; quandoquidem a^1 eſt ad a^2 ut a^2 ad a^3; & a^2 eſt ad a^3, ut a^3 ad a^4; & a^3 eſt ad a^4, ut a^4 ad a^5; atque ita deinceps. Sed exponentes earundem poteſtatum, ordine etiam ſumpti, progreſſionem component arithmeticam; quippe qui ſunt ipſi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., qui ab unitate per unitatis intervallum in infinitum progrediuntur.

755. Hinc hujuſmodi poteſtatibus, earundemq; exponentibus applicari poterunt duo illa theoremata, quæ de utraque progreſſione ſimul juncta paulo ante * oſtenſa ſunt. Itaque primo, *art. 737. ſi in ſerie poteſtatum capiantur quatuor termini 739. geometrice proportionales, erit ſumma ex exponentibus extremorum æqualis ſummæ ex exponentibus mediorum. Et ſecundo, ſi in eadem ſerie capiantur tres termini in geometrica proportione, erit ſumma ex exponentibus extremorum æqualis duplo exponentis termini medii.

756. Jam, ſi ſeriei poteſtatum a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, &c. unitas præfigatur, hæc quoque cum ipſis illis poteſtatibus progreſſionem conſtituet geometricam; quum ſit, ut 1 ad a^1, ita a^1 ad a^2. Sed ejus exponens non alius, quam zero, eſſe poteſt. Nam, quum ſint geometrice proportionales 1, a^1, a^2; erit * ſumma exponentium, *art. 739. qui referuntur ad 1, & a^2, æqualis duplo exponentis, qui refertur ad a^1: proindeque, quia duplum hujus exponentis adæquat exponens ſolius a^2; omnino neceſſe eſt, ut ſit zero exponens unitatis.

757.

757. Ubi autem exponens unitatis eſt zero, tunc ſumma exponentium multiplicandi, & mul-
*art.742. tiplicatoris adæquat * exponentem producti. Unde, ſi in ſerie earum poteſtatum duo quilibet termini per ſe mutuo debeant multiplicari; ſatis erit, in unum addere eorum exponentes, & velut productum habere terminum illum, qui eam ſummam habet pro ſuo exponente. Qua ratione erit a^5 productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a^3; & a^7 id, quod producitur, multiplicando a^3 per a^4.

758. Sed in eadem hypotheſi, quod exponens unitatis eſt zero, exponens diviſoris, ſub-
*art.744. ductus ab exponente dividendi, relinquit * exponentem quotientis. Quare, ſi in ſerie earundem poteſtatum duo quilibet termini per ſe mutuo dividi debeant; ſatis erit, ab exponente dividendi ſubducere exponentem diviſoris, & habere velut quotientem terminum illum, qui illiuſmodi reſiduum habet pro ſuo exponente. Qua ratione erit a^3 quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; & a^4 quotiens, qui producitur, dividendo a^7 per a^3.

759. Atque hinc modo haud difficile erit, naturam intelligere earum poteſtatum, quæ *dicuntur* perfectæ negativæ. Nam, quemadmodum a^3 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; ita a^{-3} deſignare debet quotientem, qui producitur, dividendo viciſſim a^2 per a^5; quandoquidem, ſi ab exponente dividendi 2 ſubducatur exponens diviſoris 5, reſiduum erit 2 — 5, hoc eſt — 3. Et ob eandem rationem, ſicuti a^4 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^7 per a^3; ita a^{-4} exhibebit quotientem, qui producitur,

di-

dividendo viciſſim a^3 per a^7.

760. Jam, ſi methodo vulgari dividatur a^2 per a^5, quotiens fiet $a^2 : a^5$, ſive etiam $1 : a^3$. Unde, quia idem quotiens exhiberi quoque poteſt per a^{-3}; conſequens eſt, ut a^{-3} idem ſit, ac $1 : a^3$. Atque ita quoque, ſi dividatur a^3 per a^7, prout vulgo diviſio peragitur, prodibit quotiens $a^3 : a^7$, ſive etiam $1 : a^4$. Quare, quum idem quotiens poſſit quoque deſignari per a^{-4}; omnino neceſſe eſt, ut a^{-4} perinde valeat, ac $1 : a^4$.

761. Quæ quum ita ſint, liquet, poteſtates perfectas negativas aliud non eſſe, quam fractiones, quæ velut numeratores habent unitatem, velut denominatores vero eaſdem illas poteſtates, conſideratas tamquam poſitivas. Qua ratione, ſicuti a^{-3} idem eſt, ac $1 : a^3$; & a^{-4} idem, ac $1 : a^4$: ſic quoque a^{-5} perinde ſignificabit, ac $1 : a^5$; & a^{-7} tantundem valebit, ac $1 : a^7$. Unde etiam a^{-1} idem erit, ac $1 : a^1$, ſive $1 : a$.

762. Ex quo patet, ope earum poteſtatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ, poſſe fractiones quodammodo ad quantitates integras revocari. Nam in fractione $a^3 : c^2$ quantitas a^3 reperitur multiplicata per $1 : c^2$: proindeque, quia $1 : c^2$ idem eſt *, ac c^{-2}, ſcribi poterit loco ejus fractionis $a^3 : c^2$ hæc quantitas quodammodo integra a^3c^{-2}. Et ſimiliter, quia in fractione $a^4 : bc^2$ quantitas a^4 reperitur multiplicata, non modo per $1 : c^2$, verum etiam per $1 : b$; deſignari poterit fractio illa $a^4 : bc^2$ ad inſtar quantitatis integræ in hunc modum $a^4b^{-1}c^{-2}$. Nam, ſicuti $1 : c^2$ idem valet, ac c^{-2}; ita $1 : b$ perinde ſignificat, ac b^{-1}.

* art. 761.

763. Sed viciſſim, ope earundem poteſtatum, poterunt quantitates integræ quodammodo ad fractiones revocari. Nam quantitas integra a^3c^2 producitur, dividendo a^3 per $1:c^2$. Unde, quia $1:c^2$ idem eſt, ac c^{-2}, ſcribi poterit loco integræ ejus quantitatis a^3c^2 hæc fractio $a^3:c^{-2}$. Et ſimiliter, quia quantitas integra a^4b^3 oritur, dividendo a^4 per $1:b^3$, ſive etiam a^4 per b^{-3}; deſignari ea poterit ad inſtar fractionis in hunc modum $a^4:b^{-3}$.

764. Generaliter autem, ſicuti quælibet quantitas, ſaltem ſubſcripta ei unitate, ſuum habet numeratorem, ſuumque denominatorem; ita, mutato ſigno exponentis, licebit, transferre aliquid, ſive ex numeratore in denominatorem, ſive viciſſim ex denominatore in numeratorem. Ita, ſi habeatur quantitas $a^2b:cd$, ſive etiam $a^2b^1:c^1d^1$, & in ea transferendum ſit b^1 ex numeratore in denominatorem; ſcribendum eſt $a^2:c^1d^1b^{-1}$. Quod ſi vero in eadem quantitate $a^2b^1:c^1d^1$ transferri debeat d^1 ex denominatore in numeratorem, ſatis erit, ſcribere $a^2b^1d^{-1}:c^1$.

IV. De poteſtatibus imperfectis, tum poſitivis, cum negativis.

765. Quid ſibi velint poteſtates perfectæ, tam poſitivæ, quam negativæ; jam quidem nobis innotuit. Sequitur modo, ut naturam oſtendamus earum poteſtatum, quæ ſunt, vel imperfectæ poſitivæ, vel imperfectæ negativæ. Et quantum ad primas, conſideremus rurſus, poteſtates perfectas poſitivas, ordine diſpoſitas, progreſſionem geometricam con-

conſtituere ; & earum indices, ſeu exponentes, ordine etiam collocatos, progreſſionem aliam arithmeticam componere.

766. Memoria etiam recolamus, geometricam illam poteſtatum progreſſionem poſſe ab unitate ſumi ſuum initium, quum eandem rationem habeat 1 ad a^1, quam habet a^1 ad a^2 ; nec alium eſſe debere exponentem unitatis, quam zero, ſeu nihil, quum ſumma exponentium, qui referuntur ad 1, & a^2, æqualis eſſe debeat duplo exponentis ipſius a^1. His enim præmiſſis, facile erit, oſtendere naturam earum poteſtatum, quæ dicuntur imperfectæ poſitivæ.

767. Vidimus namque ſuperius* quod, quum exponens unitatis eſt zero, tunc exponens lateris, duplicatus dat exponentem quadrati, triplicatus exponentem cubi, atque ita deinceps. Quare, ſi in ſerie illa poteſtatum quæratur quadratum, cubus, aut alia quævis poteſtas altioris ordinis alicujus termini; ſatis erit, ſumere duplum, triplum, quadruplum ſui exponentis, & ut quæſitam poteſtatem habere terminum illum, qui eum multiplicem habet pro ſuo exponente. Qua ratione ipſius a^2 quadratum erit a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita in infinitum. *art. 746.

768. Similiter demonſtravimus ſupra*, quod, ubi zero eſt exponens unitatis, ſemiſſis exponentis alicujus quantitatis exhibet exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, atque ita deinceps. Quare, ſi in eadem illa ſerie poteſtatum quæratur radix quadrata, cubica, aut altioris cujuſvis ordinis alicujus termini ; ſatis erit, ſumere ſemiſſem, trientem, quadrantem ſui exponentis, & ut quæſi- *art. 750.

tam

tam radicem habere terminum illum, qui eam partem aliquotam habet pro ſuo exponente. Qua ratione ipſius a^{12} quadrata radix erit a^6, radix cubica a^4, & radix quadrato-quadrata a^3.

769. Quod quum ita ſit, haud arduum modo erit, naturam intelligere earum poteſtatum, quæ dicuntur imperfectæ poſitivæ. Plane enim, quemadmodum a^2 eſt quadrata radix ipſius a^4, ita $a^{1:2}$ deſignare debet quadratam radicem, quæ elicitur ex a, ſive a^1; quandoquidem, ſicuti exponens ipſius a^2 eſt ſemiſſis exponentis alterius a^4, ita exponens ipſius $a^{1:2}$ adæquat ſemiſſem exponentis alterius a^1. Et ſimiliter, ſicuti a^2 eſt radix cubica, quæ elicitur ex a^6, ita $a^{1:3}$ erit radix cubica, quæ extrahitur ex a^1; nam, non minus exponens ipſius a^2 eſt tertia pars exponentis alterius a^6, quam exponens ipſius $a^{1:3}$ eſt tertia pars exponentis alterius a^1.

770. Ob eandem rationem $a^{3:2}$ deſignabit quadratam radicem ipſius a^3; $a^{2:3}$ radicem cubicam ipſius a^2; $a^{3:4}$ radicem quadrato-quadratam ipſius a^3; atque ita de aliis. Quocirca generaliter poteſtates imperfectæ poſitivæ non aliud erunt, quam radices, deſignatæ a denominatoribus earum fractionum, quæ ſunt exponentes talium poteſtatum, & extractæ ex poteſtatibus perfectis poſitivis, quarum exponentes ſunt numeratores earundem fractionum. Qua ratione, per poteſtates imperfectas poſitivas, uſus ſignorum radicalium omnino ex Algebra eliminatur.

771. Superſunt poteſtates imperfectæ negativæ, hoc eſt, quæ habent pro ſuis exponentibus numeros fractos negativos. Ut harum pote-

teſtatum naturam oſtendamus, notabimus primo, poteſtates perfectas negativas, non minus ac eæ, quæ poſitivæ ſunt, ordine ſumptas, progreſſionem geometricam conſtituere. Jam enim vidimus ſupra *, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. perinde valere, ac $1 : a$, $1 : a^2$, $1 : a^3$, $1 : a^4$, &c. Quare, ſicuti quantitates iſtæ $1 : a$, $1 : a^2$, $1 : a^3$, $1 : a^4$, &c. progreſſionem conſtituunt geometricam; ſic eandem progreſſionem formabunt quoque quantitates priores a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. *Art. 761.

772. Notabimus quoque, quod, licet exponentes harum poteſtatum a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. ſint negativi; tamen, ordine ſumpti, conſtituunt progreſſionem arithmeticam, non ſecus ac ii, qui referuntur ad poteſtates perfectas poſitivas a^1, a^2, a^3, a^4, &c. Unde, quia præfixa iiſdem poteſtatibus unitate, hæc pariter cum iis progreſſionem conſtituit geometricam; omnino neceſſe eſt, ut, etiam relate ad iſtiuſmodi poteſtates, zero ſit exponens unitatis. Nam aliter ſumma exponentium unitatis, & a^{-2} non foret æqualis duplo exponentis, qui refertur ad a^{-1}.

773. Hæc vero quum ita ſint, liquet, ea omnia, quæ locum habent in poteſtatibus perfectis poſitivis, obtinere quoque, relate ad poteſtates perfectas negativas. Quocirca, ſicuti poteſtatis perfectæ poſitivæ a^2 quadratum eſt a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis; ita quoque poteſtatis perfectæ negativæ a^{-2} quadratum erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratum a^{-8}, atque ita deinceps. Pariterque, ſicuti poteſtatis perfectæ poſitivæ a^{12} ra-

radix quadrata eſt a^6, radix cubica a^4, & radix quadrato-quadrata a^3; ſic pariter poteſtatis perfectæ negativæ a^{-12} radix ſecunda erit a^{-6}, radix tertia a^{-4}, & radix quarta a^{-3}.

774. Unde porro, quemadmodum $a^{1:2}$, $a^{1:3}$, $a^{1:4}$ ſunt radices quadrata, cubica, quadrato-quadrata ipſius a^1; ita $a^{-1:2}$, $a^{-1:3}$, $a^{-1:4}$ erunt radices cognomines ipſius a^{-1}. Pariterque, ſicuti $a^{2:3}$, $a^{3:4}$, $a^{4:5}$ ſunt radices tertia, quarta, quinta ipſarum a^2, a^3, a^4; ita $a^{-2:3}$, $a^{-3:4}$, $a^{-4:5}$ erunt radices non diſſimiles ipſarum a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}. Quare, quum a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} perinde valeant, ac $1:a^2$, $1:a^3$, $1:a^4$; liquet, $a^{-2:3}$ eſſe radicem cubicam fractionis $1:a^2$, $a^{-3:4}$ radicem quadrato-quadratam fractionis $1:a^3$, & $a^{-4:5}$ radicem quadrato-cubicam fractionis $1:a^4$.

775. Jam, quæcumque radix ex unitate ſit extrahenda, ea erit ipſa unitas. Quocirca poteſtates imperfectæ negativæ generaliter non aliud erunt, quam fractiones, habentes pro ſuis numeratoribus unitatem, & pro denominatoribus eaſdem illas radicales, quas eæ poteſtates deſignarent, ſi utique eſſent poſitivæ. Ita $a^{2:3}$ idem eſt, ac $\sqrt[3]{a^2}$; proindeque $a^{-2:3}$ tantundem valebit, ac $1:\sqrt[3]{a^2}$. Similiter $a^{3:4}$ idem eſt, ac $\sqrt[4]{a^3}$; ideoque $a^{-3:4}$ perinde ſignificabit, ac $1:\sqrt[4]{a^3}$.

776. Mediantibus ergo poteſtatibus imperfectis, radicalia ſigna omnino ex Algebra eliminare licebit. Nam quadrata radix, exempli gratia, quantitatis a, ſicuti vulgo exhibetur per $\sqrt{a}$, ſic poterit deſignari ad inſtar poteſtatis in hunc modum $a^{1:2}$. Et ſimiliter radix cubica quantitatis

tis

tis a^2, quæ vulgo deſignatur per $\sqrt{3}a^2$, formam induens poteſtatis, exprimi poterit per $a^{2:3}$. Sed, ſi quæratur quadrata radix ipſius ab, ſive a^1b^1; ea erit $a^{1:2}b^{1:2}$. Pariterque, ſi extrahenda ſit radix cubica ex a^2b, ſive etiam ex a^2b^1; erit $a^{2:3}b^{1:3}$ radix iſta.

V. Geneſis aliarum poteſtatum, & calculus omnium per exponentes.

777. EX iis, quæ hactenus dicta ſunt, abunde, opinor, liquet, quæ ſit natura poteſtatum omnium, quodve diſcrimen inter eas. Verum, ut geneſis aliarum poteſtatum clarior evadat, conſideretur primo velim, quod, ſicuti progreſſio geometrica poteſtatum vulgarium a^1, a^2, a^3, a^4, &c., continuata verſus a^1, primo per unitatem, tum per terminos iſtos $1:a$, $1:a^2$, $1:a^3$, $1:a^4$, &c. excurrit; ſic progreſſio arithmetica ſuorum exponentium 1, 2, 3, 4, &c., continuata verſus 1, primo quidem per zero, deinde vero per numeros negativos -1, -2, -3, -4, &c. promovetur.

778. Hinc ergo facile erit intelligere, debere eſſe zero exponentem unitatis, & -1, -2, -3, -4, &c. exponentes terminorum $1:a$, $1:a^2$, $1:a^3$, $1:a^4$, &c. Unde, ſi alii iſti termini per ſuos exponentes eſſent deſignandi; oporteret, unitatem quidem exhibere per a^0, terminos vero alios $1:a$, $1:a^2$, $1:a^3$, $1:a^4$, &c. per a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c.: proindeque oriuntur poteſtates perfectæ negativæ, quotieſcumque progreſſio geometrica poteſtatum

vulgarium a^1, a^2, a^3, a^4, &c. continuatur verſus a^1.

779. Inter terminos porro ejuſdem progreſſionis geometricæ, utrinque continuatæ, nihil prohibet, quin infiniti alii interponantur. Licebit enim, inter duos quoſque terminos ejus progreſſionis, ſive unam, ſive duas, ſive quotvis alias medias proportionales interponere; nec ideo progreſſionis geometricæ naturam amittet. Sed interpoſitorum terminorum exponentes habebuntur, ſi alii totidem interjiciantur inter terminos progreſſionis arithmeticæ, quæ eſt ſedes, ſeu locus exponentium.

780. Ita, ſi inter duos quoſque terminos progreſſionis geometricæ una media proportionalis interponatur; iſtæ erunt $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a^5}$, $\sqrt{a^7}$, &c., quum ab unitate aſcendimus ad poteſtates perfectas poſitivas; & $1 : \sqrt{a}$, $1 : \sqrt{a^3}$, $1 : \sqrt{a^5}$, $1 : \sqrt{a^7}$, &c., quum viciſſim ab unitate ad poteſtates perfectas negativas deſcendimus. Unde, relate ad primas, exponentes erunt $1 : 2$, $3 : 2$, $5 : 2$, $7 : 2$, &c.; relate vero ad ſecundas, erunt exponentes $-1 : 2$, $-3 : 2$, $-5 : 2$, $-7 : 2$, &c.: proindeque, adhibitis exponentibus, primæ quidem per $a^{1:2}$, $a^{3:2}$, $a^{5:2}$, $a^{7:2}$, &c., ſecundæ vero per $a^{-1:2}$, $a^{-3:2}$, $a^{-5:2}$, $a^{-7:2}$, &c. debent exhiberi.

781. Eadem ratione, ſi inter duos quoſque terminos progreſſionis geometricæ duæ mediæ proportionales interponantur; iſtæ erunt $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^4}$, $\sqrt[3]{a^5}$; $\sqrt[3]{a^7}$, $\sqrt[3]{a^8}$; $\sqrt[3]{a^{10}}$, $\sqrt[4]{a^{11}}$; &c., aſcendendo ab unitate ad poteſtates perfectas poſitivas; & $1 : \sqrt[3]{a}$, $1 : \sqrt[3]{a^2}$; $1 : \sqrt[3]{a^4}$, $1 : \sqrt[3]{a^5}$; $1 : \sqrt[3]{a^7}$, $1 : \sqrt[3]{a^8}$; $1 : \sqrt[3]{a^{10}}$, $1 : \sqrt[3]{a^{11}}$; &c.

&c.; deſcendendo ab unitate ad poteſtates perfectas negativas. Quare, in ordine ad primas, exponentes erunt $1:3$, $2:3$; $4:3$, $5:3$; $7:3$, $8:3$; $10:3$, $11:3$; &c.; in ordine vero ad ſecundas, erunt $-1:3$; $-2:3$; $-4:3$, $-5:3$; $-7:3$, $-8:3$; $-10:3$, $-11:3$; &c.: & propterea, ope exponentium, primæ quidem per $a^{1:3}$, $a^{2:3}$; $a^{4:3}$, $a^{5:3}$; $a^{7:3}$, $a^{8:3}$; $a^{10:3}$, $a^{11:3}$; &c., ſecundæ vero per $a^{-1:3}$, $a^{-2:3}$; $a^{-4:3}$, $a^{-5:3}$; $a^{-7:3}$, $a^{-8:3}$; $a^{-10:3}$, $a^{-11:3}$; &c. forent repræſentandæ.

782. Quæ quum ita ſint, liquet, oriri poteſtates imperfectas, ſive poſitivas, ſive negativas, quotieſcumq; inter terminos progreſſionis geometricæ poteſtatum vulgarium, utrinque continuatæ, interponuntur termini alii. Sed, quum hæc ſit geneſis aliarum poteſtatum, perſpicuum eſt quoque, in una eademque progreſſione geometrica omnes omnino poteſtates includi. Et quoniam in hac eadem progreſſione reperitur unitas, quæ non alium in ea exponentem habet, quam zero; licebit, calculum poteſtatum omnium, adhibitis exponentibus, paulo ſimplicius in hunc modum abſolvere.

783. Nimirum primo, quantum ad multiplicationem duarum poteſtatum unius, ejuſdemque quantitatis; licebit, eam inſtituere, addendo ſimul exponentes datarum poteſtatum, & ſcribendo ſummam pro exponente producti. Ita, ad multiplicandum a^2 per a^3, ſcribendum eſt a^5; quia exponentes 2, & 3 ſimul additi conficiunt 5. Similiter, ad multiplicandum a^5 per a^{-3}, ſcribendum eſt a^2; quia ſumma exponentium 5, & -3 eſt 2. Atque ita quoque, ad multi-

 pli-

plicandum a^2 per $a^{1:2}$, ſcribi debet $a^{5:2}$; quia 2, & 1 : 2 ſimul ſunt 5 : 2. Tandemque erit $a^{-3:2}$ productum, quod oritur, multiplicando a^{-2} per $a^{1:2}$; quandoquidem -2, & 1 : 2 ſimul ſunt $-3:2$.

784. Secundo, quantum ad diviſionem duarum poteſtatum unius, ejuſdemque quantitatis, poterit ea inſtitui, ſubducendo a ſe mutuo exponentes datarum poteſtatum, & ſcribendo reſiduum pro exponente quotientis. Ita, ad dividendum a^5 per a^2, ſcribendum eſt a^3; quia exponens 2, ſubductus ab exponente 5, relinquit 3. Similiter, ad dividendum a^2 per a^{-3}, ſcribendum eſt a^5; quia, ſi ex exponente 2 ſubducatur exponens -3, reſiduum erit 5. Eadem ratione, ad dividendum $a^{5:2}$ per a^2, ſcribi debet $a^{1:2}$; quia, ſi ex 5 : 2 ſubtrahatur 2, reſiduum fiet 1 : 2. Atque ita demum erit a^{-2} quotiens, qui oritur, dividendo $a^{-3:2}$ per $a^{1:2}$; quandoquidem 1 : 2, ſubductus ex $-3:2$, relinquit $-4:2$, ſive -2.

785. Tertio, quantum ad formationem poteſtatum vulgarium, fiet ea, ſi exponens datæ quantitatis toties accipiatur, quot ſunt unitates in exponente poteſtatis, ad quam *illa* eſt elevanda. Ita quantitatis a^2 quadratum erit a^4, cubus a^6, & quadrato-quadratum a^8; nam ejus exponens 2, ſumptus bis facit 4, ſumptus ter facit 6, ſumptus quater facit 8. Similiter quantitatis a^{-2} quadratum erit a^{-4}, cubus a^{-6}, & quadrato-quadratum a^{-8}; quandoquidem, ſumendo bis, ter, quater exponentem ejus -2, oriuntur numeri -4, -6, -8. Et ob eandem rationem erunt a^1, $a^{3:2}$,

a^2 conſimiles poteſtates quantitatis $a^{1:2}$; & a^{-1}, $a^{-3:2}$, a^{-2} poteſtates cognomines quantitatis $a^{-1:2}$.

786. Denique, quantum ad radicum extractionem, inſtituetur ea, ſi ex exponente datæ poteſtatis ea pars capiatur, quam denominat exponens radicis extrahendæ. Ita quantitatis a^2 quadrata radix erit a^1, radix cubica $a^{2:3}$, radix quadrato-quadrata $a^{1:2}$; nam ſui exponentis 2 ſemiſſis eſt 1, triens eſt 2:3, quadrans eſt 1:2. Similiter quantitatis a^{-2} radix quadrata erit a^{-1}, radix cubica $a^{-2:3}$, radix quadrato-quadrata $a^{-1:2}$; quandoquidem ſemiſſis, triens, quadrans ſui exponentis -2 ſunt -1, $-2:3$, $-1:2$. Et ob eandem rationem erunt $a^{1:4}$, $a^{1:6}$, $a^{1:8}$ conſimiles radices quantitatis $a^{1:2}$; & $a^{-1:4}$, $a^{-1:6}$, $a^{-1:8}$ radices cognomines quantitatis $a^{-1:2}$.

787. Pendent autem hæc omnia ex iis, quæ ſuperius circa quatuor haſce operationes oſtenſa ſunt. Nimirum, quod, ubi exponens unitatis eſt zero, tunc neceſſe eſt; primo, ut ſumma exponentium multiplicandi, & multiplicatoris adæquet * exponentem producti; ſecundo, ut exponens diviſoris, ſubductus ab exponente dividendi, relinquat * exponentem quotientis; tertio, ut duplum exponentis lateris adæquet * exponentem quadrati, triplum exponentem cubi, quadruplum exponentem quadrato-quadrati, atque ita deinceps; & quarto demum, ut ſemiſſis exponentis alicujus quantitatis adæquet * exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, quadrans exponentem ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita in infinitum.

* art. 742. * art. 744. * art. 748. * art. 750.

788. Præterea, quum fractiones, per pote-
* art. 762. ſtates negativas, poſſint quodammodo * ad quantitates integras revocari; nolo hic reticere, hujuſmodi artificio poſſe calculum fractionum iiſdem omnino regulis perfici, quibus quantitatum integrarum calculus inſtituitur. Ita, ſi oporteat multiplicare $a^2 : b$ per $c^2 : d$; revoco primum fractiones iſtas $a^2 : b$, $c^2 : d$ ad quantitates integras a^2b^{-1}, c^2d^{-1}; & fiet productum quæſitum $a^2b^{-1}c^2d^{-1}$, quod reducitur ad $a^2c^2 : bd$. Similiter, ſi dividere oporteat $a^3 : c$ per $b^2 : d$; exprimo prius fractiones iſtas $a^3 : c$, $b^2 : d$ ad inſtar quantitatum integrarum in hunc modum a^3c^{-1}, b^2d^{-1}; & fiet quotiens quæſitus $a^3c^{-1} : b^2d^{-1}$, qui perinde valet, ac $a^3d : b^2c$.

789. Denique, conſiderando quantitates radicales, velut poteſtates imperfectas, faciliime
* art. 154. intelligitur veritas regulæ, ſuperius * traditæ, pro reducendis radicalibus ad eandem denominationem. Jam enim radicales duæ $\sqrt{a}$, & $\sqrt[3]{b}$, reductæ ope ejus regulæ ad idem nomen, fiunt $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$. Plane vero, quum $\sqrt{a}$ idem ſit, ac $a^{1:2}$, & $\sqrt[3]{b}$ idem, ac $b^{1:3}$; pro earum radicalium reductione non aliud fieri debet, quam revocare ad eandem denominationem fractiones duas $1 : 2$, & $1 : 3$, quæ ſunt earundem exponentes. Unde, quia fractiones duæ $1 : 2$, & $1 : 3$, reductæ ad idem nomen, evadunt $3 : 6$, & $2 : 6$; erunt $a^{1:2}$, & $b^{1:3}$ idem ac $a^{3:6}$, & $b^{2:6}$; hoc eſt idem, ac $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$.

CA-

CAPUT II.

Poteſtatum vulgarium formula generalis.

790. EX iis, quæ de formatione poteſtatum vulgarium ſuperius dicta ſunt, perſpicuum eſt, quantitatem, ex duabus partibus compoſitam, non una, eademque regula ad poteſtatem quamvis evehi poſſe; ſed alia quidem opus eſſe, pro elevanda ea ad quadratum; alia, pro elevanda ad cubum; & alia demum, pro elevanda eadem quantitate ad poteſtatem aliam ſuperiorem. Itaque, quum pro ſingulis poteſtatibus totidem regulæ diverſæ requirantur; erit equidem compendii, numquam ſatis deprædicandi, ſi quæ poſſit formula generalis excogitari, quæ ad omnem quamcumque poteſtatem ſe extendat.

791. Et quidem, ubi quantitas eſt ſimplex, facile quidem erit, una eademque expreſſione omnes ejus poteſtates exhibere. Ut enim quilibet numerus poteſt generaliter, ac indefinite repræſentari littera m; ſic, ſcribendo a^m, jam omnes poteſtates exhibentur, ad quas evehi poteſt quantitas ſimplex a. Ponatur namque m æqualis unitati; & fiet a^m idem, ac a^1. Ponatur deinde m æqualis binario; & a^m perinde valebit, ac a^2. Atque ita quoque, ſi pro m ſucceſſive ſcribantur 3, 4, 5, &c.; fient a^3, a^4, a^5, &c. valores ipſius a^m.

792. Sed non perinde res eſt, quum quantitas duabus ex partibus conſtat. Nam, ſi ad deſignan-

ſignandam quamcumque poteſtatem quantitatis binomiæ $a + b$, ſcribi velit $(a + b)^m$; generali iſta expreſſione optatum finem nequaquam aſſequemur. Ponatur enim, exempli gratia, exponens generalis m æqualis binario. Et licet $(a + b)^m$ evadat in hòc caſu $(a + b)^2$; non tamen cognitæ fiunt, ac exploratæ partes, ex quibus componitur quadratum ipſius $a + b$. Itaque formula generalis, relate ad quantitatem bimembrem $a + b$, talis ſit oportet, ut ope ejus partes cujuſcumque ſuæ poteſtatis ſtatim habeantur.

I. Terminorum cujuſque poteſtatis generalis expreſſio.

793. Quum quantitas eſt *bimembris*, quæcumque ejus poteſtas non modo plures partes, ſeu terminos involvit, ſed quiſque horum terminorum ſuum habet coefficientem. Unde, pro conficienda formula generali, quæ ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, duo quidem erunt nobis oſtendenda. Primum, qua ratione deſignari debeant generaliter, ac indefinite termini cujuſcumque poteſtatis ex quantitate bimembri. Deinde, quo pacto generaliter, ac indefinite ſint deſignandi coefficientes eorum terminorum.

794. Sane in formatione poteſtatum, quod potiſſimum difficultatem facit, eſt inventio coefficientium, quibus afficiendi ſunt termini ipſarum poteſtatum. Nam, quantum ad ipſos terminos, habentur ii nullo negotio, ſi conſtituantur duæ progreſſiones geometricæ, quarum

una

una a quæſita primæ partis poteſtate deſcendat per poteſtates inferiores uſque ad unitatem, altera viciſſim ab unitate aſcendat per omnes inferiores poteſtates uſque ad quæſitam poteſtatem partis alterius; & termini unius progreſſionis ordine multiplicentur per terminos alterius.

795. Ut ſi velim, exempli gratia, invenire terminos cubi ex quantitate binomia $a+b$, conſtituo primum duas progreſſiones geometricas; quarum una deſcendat a cubo prioris partis a per poteſtates inferiores uſque ad unitatem; altera viciſſim aſcendat ab unitate ſimiliter per poteſtates inferiores uſque ad cubum partis alterius b. Jamque harum progreſſionum prior erit a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3. Multiplico deinde terminos unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & quantitates, inde ortæ, a^3, a^2b, ab^2, b^3 erunt termini cubi quæſiti.

796. Similiter, ſi inveniendi ſint termini, quos continet quadrato-cubus, ſeu quinta poteſtas ejuſdem quantitatis binomiæ $a+b$, formentur prius duæ progreſſiones geometricæ: quarum una a quadrato-cubo ipſius a deſcendat per poteſtates inferiores uſque ad unitatem, ita, ut ſit a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1; altera viciſſim ab unitate per poteſtates inferiores aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b, ita, ut ſit 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5. Multiplicentur deinde termini unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & quæ inde oriuntur quantitates a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5, erunt termini quadrato-cubi quæſiti.

797. Eadem ratione, ſi quæſtio ſit de inveniendis terminis ſeptimæ poteſtatis ejuſdem

quan-

quantitatis bimembris $a + b$, fiant duæ progreſſiones geometricæ; quarum una a ſeptima poteſtate prioris partis a deſcendat per poteſtates inferiores uſque ad unitatem; altera viciſſim ab unitate per poteſtates inferiores aſcendat uſque ad ſeptimam poteſtatem partis alterius b. Iſtarum ergo progreſſionum prior erit $a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$; poſterior $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7$. Multiplicentur poſtea termini unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & fient termini quæſitæ poteſtatis quantitates, quæ inde producuntur, $a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7$.

798. Jam ex hac methodo determinandi terminos cujuſcumque poteſtatis ex radice binomia colligere licet primo, in unaquaque poteſtate terminorum numerum deſignari ab exponente ipſius poteſtatis, aucto unitate una. Nam habentur * termini cujuſque poteſtatis, multiplicando per ſe invicem terminos duarum progreſſionum geometricarum; quarum una a quæſita poteſtate partis prioris deſcendat per omnes poteſtates inferiores uſque ad unitatem; altera per contrarium ab unitate aſcendat per omnes poteſtates inferiores uſque ad quæſitam poteſtatem partis alterius. Itaque, quia numerus terminorum in utraque progreſſione deſignatur ab exponente poteſtatis, aucto unitate una; deſignabit idem exponens, unitate auctus, numerum terminorum quæſitæ poteſtatis.

* Art. 794.

799. Colligere licet ſecundo, in terminis extremis cujuſque poteſtatis ex radice binomia contineri tantummodo poteſtates partium ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; in terminis

autem intermediis contineri poteſtates omnes inferiores earundem partium,per ſe mutuo inverſo ordine multiplicatas. Nam ex duabus illis progreſſionibus geometricis, quarum ope termini cujuſque poteſtatis inveniuntur, una quidem a quæſita primæ partis poteſtate deſcendit ad unitatem uſque per poteſtates omnes inferiores; altera viciſſim ab unitate per eaſdem poteſtates inferiores aſcendit uſque ad quæſitam poteſtatem partis alterius. Unde quæſitæ poteſtates partium multiplicantur per unitatem, earundem vero poteſtates inferiores multiplicantur per ſe mutuo ordine inverſo.

800. Colligere licet demum, terminos cujuſque poteſtatis ex radice aliqua bimembri progreſſionem geometricam conſtituere, progredientem in ea ratione, quam habent ipſæ radicis partes inter ſe.. Notum eſt enim, quod ſi termini unius progreſſionis geometricæ multiplicentur per terminos alterius progreſſionis geometricæ, producta progreſſionem aliam ſimiliter geometricam conſtituunt. Itaque, quia ad inveniendos terminos cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua binomia, multiplicandi * ſunt *art. 794. termini unius progreſſionis geometricæ per terminos alterius; omnino neceſſe eſt, ut ipſi ejus poteſtatis termini progreſſionem aliam pariter geometricam componant.

801. Sed ex eadem methodo colligere quoque licet, qua ratione termini cujuſque poteſtatis ex radice bimembri generaliter, ac indefinite poſſint deſignari. Oporteat enim, invenire terminos poteſtatis ex $a + b$, cujus exponens generaliter, ac indefinite ſit numerus m. Conſti-

tuendæ ſunt ergo duæ progreſſiones geometricæ; quarum una ab ea poteſtate partis a, quam deſignat numerus m, deſcendat per poteſtates omnes inferiores uſque ad unitatem; altera viciſſim ab unitate per poteſtates omnes inferiores aſcendat uſque ad eam poteſtatem partis alterius b, quæ habet pro ſuo exponente eundem numerum m. Unde iſtarum progreſſionum una erit a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, &c. altera 1, b, b^2, b^3, b^4, &c. Multiplicentur poſtea termini unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & fient termini quæſiti quantitates, quæ inde oriuntur, a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, &c.

802. Verum quidem eſt, quod termini iſti videntur eſſe numero infiniti; attamen, quum exponens generalis m determinatur, multitudo eorum evadit finita. Eo namq; determinato, neceſſe eſt tandem pervenire ad terminum aliquem, in quo exponens poteſtatis, ad quam aſcendit pars prior radicis a, eſt zero, ſeu nihil. Plane vero, quum ad hujuſmodi terminum perventum eſt, non amplius progredi licet; quia ea poteſtas tantundem valet, ac unitas. Ita, ſi ponamus exponentem generalem m binarium repræſentare, prior terminus erit a^2, ſecundus ab, tertius autem b^2; nam a^{m-2}, quum idem ſit, ac a^0, non differt ab unitate: proindeque termini quæſiti erunt a^2, ab, b^2. Similiter, ſi ponatur m æqualis ternario, prior terminus erit a^3, ſecundus a^2b, tertius ab^2, & quartus b^3; quandoquidem a^{m-3}, quum ſit idem, ac a^0, tantundem valet, ac unitas: & propterea quæſiti termini erunt a^3, a^2b, ab^2, b^3.

803. Cæterum, quod quantitas elevata ad po-

poteſtatem, cujus exponens ſit zero, tantundem valet, ac unitas, id liquet ex eo, quod ſuperius* oſtenſum eſt: ſcilicet, quod, unitate inter poteſtates collocata, non alius eſſe debet ejus exponens, quam zero, ſeu nihil. Idem autem licebit etiam exinde deducere, quod munus exponentis ſit* deſignare, quoties quantitas poni debet per multiplicationem in eo termino, in quo reperitur. Hinc enim fit, ut quoties habetur a^0, ſive $1a^0$, quantitas a nullies in hoc termino poni debeat: proindeque $1a^0$ idem erit, ac 1. Ex quo facile modo erit intelligere, quod licet idem ſit valor, tam ipſius a^0, quam ipſius b^0, non hinc tamen colligi poteſt, quantitates a, & b æquales eſſe inter ſe; quandoquidem hujuſmodi quantitates apparenter tantum in iis terminis continentur.

*art. 756.

*art. 76.

II. Tabulæ, terminorum cujuſque poteſtatis coefficientes exhibentis, conſtitutio.

804. Quo pacto termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua binómia poſſint generaliter, ac indefinite deſignari; jam quidem nobis * innotuit. Videndum eſt modo, qua ratione coefficientes eorundem terminorum eadem univerſalitate exprimi queant. Hunc in finem exhibeantur prius in tabula aliqua ordine coefficientes illi, prout ad terminos cujuſq; poteſtatis referuntur; & ſedulo perpendamus, num aliqua iis inſit proprietas generalis, qua mediante generaliter etiam eos exprimere liceat.

*art. 801.

805. Itaque in columnis horizontalibus ſequentis tabulæ collocentur ordine coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis; nimirum in

pri-

prima coefficientes terminorum poteſtatis primæ 1, 1; in ſecunda coefficientes terminorum poteſtatis ſecundæ 1, 2, 1; in tertia coefficientes terminorum poteſtatis tertiæ 1, 3, 3, 1; in quarta coefficientes terminorum poteſtatis quartæ 1, 4, 6, 4, 1; atque ita deinceps. Jamque in prima columnarum verticalium ejuſdem tabulæ erit coefficiens primi termini cujuſque poteſtatis; in ſecunda coefficiens termini ſecundi; in tertia coefficiens termini tertii; atque ita in infinitum.

1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1

806. Hinc tabulæ hujus ſtructura talis erit, ut numeri, exiſtentes in quacumque columna horizontali, deſignent ordine coefficientes terminorum ejus poteſtatis, quam columnæ lo-

cus

cus oſtendit; numeri vero, exiſtentes in quaque columna verticali deſignent ordine coefficientes, qui in ſingulis poteſtatibus ad eum terminum referuntur, quem locus indicat ejuſdem columnæ. Unde eo res redit, ut inquiramus, an numeri cujuſque columnæ verticalis aliquam habeant proprietatem, cujus ope poſſint generaliter, ac indefinite deſignari.

807. Et quidem in tabula iſta termini prioris columnæ verticalis conſtituunt ſeriem unitatum, termini ſecundæ columnæ conſtituunt ſeriem numerorum naturalium, ac demum termini aliarum columnarum tales ſunt, ut quilibet ex iis in quaque columna æquetur ſummæ omnium ſuperiorum columnæ præcedentis. Unde, ſicuti, ope hujus proprietatis, tabula ipſa nullo negotio poteſt in infinitum continuari; ita exinde colligere licet, quod, ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quavis aliarum columnarum, ſatis eſt, in unum addere omnes terminos ſuperiores, qui ſunt in columna præcedente.

808. Sed exinde colligi quoque poteſt, numeros, qui ſunt in aliis columnis verticalibus ejuſdem tabulæ, eſſe numeros figuratos primi generis. Jam enim in iis columnis numerus quiſque oritur ex collectione numerorum ſuperiorum columnæ præcedentis. Itaque, quia in ſecunda columna adſunt numeri naturales, qui ex continua unitatum collectione oriuntur; omnino neceſſe eſt *, ut in tertia columna reperiantur numeri, conſtituentes in primo genere primum ordinem figuratorum; in quarta numeri, conſtituentes in eodem genere ſecundum ordi- *art. 577.

nem

nem figuratorum; atque ita deinceps.

809. Neque vero difficile erit oſtendere, conſtitutionem tabulæ prædictæ talem eſſe oportere, qualem modo deſcripſimus. Jam enim ex geneſi poteſtatum vulgarium, ſuperius tradita, manifeſtum eſt, unamquamque harum poteſtatum oriri, multiplicando poteſtatem proxime præcedentem per radicem, ad quam refertur. Itaque omnino neceſſe eſt, ut ſi coefficientes terminorum alicujus poteſtatis, quibus cyphra ſit præfixa, addantur ordine cum iiſdem coefficientibus, quibus eadem cyphra ſit poſtpoſita, oriantur coefficientes terminorum poteſtatis proxime ſequentis.

810. Ita quadratum, ſeu ſecunda poteſtas radicis binomiæ $a+b$ oritur, multiplicando primam ejus poteſtatem $1a+1b$ per radicem ipſam $a+b$. Unde, ſi fiat multiplicatio, & producta partialia homogenea, hoc eſt iiſdem litteris notata, in eodem loco ſcribantur; abunde conſtabit, coefficientes terminorum quadrati 1, 2, 1 oriri, addendo coefficientes primæ poteſtatis, zero habentes in principio, 0, 1, 1 ordine cum iiſdem coefficientibus, zero habentibus in fine, 1, 1, 0.

811. Similiter cubus, ſeu tertia poteſtas radicis binomiæ $a+b$ producitur, multiplicando quadratum $1a^2+2ab+1b^2$ per radicem ipſam $a+b$. Quare, ſi in multiplicatione peragenda ſcribantur in iiſdem locis producta illa partialia, quæ homogenea ſunt; liquido patebit, coefficientes terminorum cubi 1, 3, 3, 1 prodire, addendo coefficientes quadrati, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 1 ordine cum iiſdem coefficien-

tibus, cyphram habentibus in fine 1, 2, 1, 0.

812. Id vero quum ita ſit, liquet, coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis ex radice binomia haberi, ſi præfixa, ac poſtpoſita cyphra iis coefficientibus, qui referuntur ad terminos poteſtatis præcedentis, addatur quiſque eorum cum ſuo ſubſequente. Nam hac ratione, non aliud efficitur, quam coefficientes iſtos, cyphram habentes in principio, addere cum iiſdem coefficientibus, cyphram habentibus in fine.

813. Ut, quoniam coefficientes terminorum ſecundæ poteſtatis, habentes cyphram, tam in principio, quam in fine, ſunt 0, 1, 2, 1, 0; fient coefficientes terminorum tertiæ poteſtatis 0+1, 1+2, 2+1, 1+0; hoc eſt 1, 3, 3, 1. Et ſimiliter, quia iſti coefficientes, quum cyphram utrinque habent, ſunt 0, 1, 3, 3, 1, 0; erunt coefficientes terminorum quartæ poteſtatis 0+1 1+3, 3+3, 3+1, 1+0; hoc eſt 1, 4, 6, 4, 1.

814. Hinc, ſiquidem tabula coefficientium conſtruatur in hunc modum, proprietas ejus hæc erit, ut quilibet terminus cujuſque columnæ verticalis adæquet, & ſibi imminentem terminum, & qui ad dexteram hujus reperitur. Unde, quia in prima columna verticali adeſt ſeries unitatum; omnino neceſſe eſt, ut in ſecunda columna reperiantur numeri naturales, qui per continuam unitatis additionem oriuntur.

815. Jam aliæ columnæ verticales ſimiliter ab unitate ſuum ſumunt initium; ſed unaquæque ex iis eſt uno termino depreſſior ſua præcedente. Quare in iiſdem columnis non poterit quiſque terminus adæquare, & terminum ſibi imminentem, & eum, qui ad dexteram hujus reperitur,

niſi adæquet eodem tempore terminos omnes ſuperiores columnæ præcedentis: proindeque termini cujuſque aliarum columnarum oriuntur ex collectione continua terminorum ſuperiorum qui in præcedente columna reperiuntur.

III. *Coefficientium terminorum cujuſque poteſtatis expreſſio generalis.*

816. COgnita conſtitutione tabulæ, terminorum cujuſque poteſtatis coefficientes exhibentis; videamus modo, qua ratione iidem coefficientes poſſint generaliter, ac indefinite repræſentari. Et quidem, ſi loca vacua columnarum verticalium cyphris repleantur, habebit in principio unam cyphram tertia columna, duas cyphras quarta, tres cyphras quinta, atque ita deinceps. Unde, ſi in ſingulis columnis capiantur tot termini, quot deſignat numerus m; multitudo terminorum ſignificantium erit m, tam in prima, quam in ſecunda columna; ſed erit $m - 1$ in tertia, $m - 2$ in quarta, $m - 3$ in quinta, atque ita in infinitum.

817. Id vero quum ita ſit, facile erit, deſignare generaliter, ac indefinite terminum *quemcumque* cujuſque columnæ verticalis. Nam, quantum ad primam columnam, quia in ea habetur ſeries unitatum, quæ nullam habet cyphram in principio; deſignabit ipſa unitas terminum quemcumque ejus columnæ. Quantum vero ad ſecundam, quia in ea exiſtit ſeries numerorum naturalium, cui ſimiliter nulla cyphra eſt præfixa; ſi proponatur inveniendus terminus qui occupet locum, deſignatum a numero m, exhi-

exhibebit idem numerus m terminum, quem oportet invenire.

818. Quantum autem ad alias columnas, neque etiam difficile erit, in iis terminum quemcumque generaliter, ac indefinite deſignare. Quum enim in columnis illis contineantur * ordine *art. 803. ſeries numerorum figuratorum primi generis; ſatis erit, in unum colligere tot eorum numerorum, ex quorum collectione ii generari intelliguntur, quotus eſt locus, quem in columna occupat terminus inveniendus, excluſis cyphris initialibus.

819. Ita in tertia columna exiſtunt numeri, qui in primo genere primum ordinem figuratorum conſtituunt, iidemque unam cyphram habent in principio. Quare, ſi in ea oporteat invenire terminum, qui occupet locum, deſignatum a numero m; ſatis erit, in unum addere tot numeros naturales, quot deſignat $m - 1$. Atque ita quoque in quarta columna habentur numeri, conſtituentes in eodem primo genere ſecundum ordinem figuratorum, iiſque duæ cyphræ ſunt præfixæ. Itaque, ſi inveniendus ſit in ea terminus, cujus locum referat numerus m; addendi erunt in unum tot figurati primi ordinis, quot deſignat $m - 2$.

820. Jam vidimus ſupra *, ſummam quot- *art. 593. cumque numerorum figuratorum primi generis reperiri; conſtituendo duas progreſſiones arithmeticas, ambas aſcendentes per unitatis incrementum, unam quidem a multitudine numerorum, in unam ſummam colligendorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus

unitatibus auctus; & dividendo productum ex terminis primæ progreſſionis per productum ex terminis ſecundæ.

821. Itaque, ſi inveniendus ſit terminus, qui in tertia columna verticali locum occupet, deſignatum ab m; progreſſionum conſtituendarum una erit $m - 1$, m, altera 1, 2: proindeque, oſtendentibus punctis, inter progreſſionum terminos poſitis, mutuam eorum *multiplicationem*, erit $(m . m - 1):(1 . 2)$ terminus quæſitus. Sed, ſi conſimilis terminus inveniendus ſit in quarta columna verticali; ex progreſſionibus conſtituendis una erit $m - 2$, $m - 1$, m, altera 1, 2, 3: & propterea quæſitus terminus erit $(m . m - 1 . m - 2):(1 . 2 . 3)$.

822. Hinc facile modo erit, coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis *generaliter*, ac indefinite deſignare. Nam numeri, exiſtentes in
Art. 806. quaque columna verticali, deſignant ordine coefficientes, qui in ſingulis poteſtatibus ad eum terminum referuntur, quem indicat locus ejuſdem columnæ. Quare illæ eædem quantitates, quæ numeros columnarum verticalium generaliter, ac indefinite deſignant, deſignabunt quoque in unaquaque poteſtate generaliter, ac *indefinite* coefficientes ſuorum terminorum.

823. Ut ergo relate ad primum terminum coefficiens pro qualibet poteſtate debet eſſe unitas; ita generalis expreſſio coefficientis erit m, ſive $m:1$ relate ad terminum ſecundum, $(m . m - 1):(1 . 2)$ relate ad terminum tertium, $(m . m - 1 . m - 2):(1 . 2 . 3)$ relate ad terminum quartum, atque ita deinceps. Nam iſtæ eædem quantitates deſignant generaliter, ac inde-

definite numeros earum columnarum verticalium, quæ primam excipiunt.

824. Quemadmodum autem multitudo terminorum cujuſque poteſtatis evadit finita, ubi exponens generalis m determinatur; ita, determinato eodem exponente, multitudo eorum coefficientium tanta prodit, quotus eſt numerus terminorum illius poteſtatis, ad quam exponens ille refertur. Qua ratione, ſi exponens generalis m ſit 2, non plures, quam tres coefficientes habebuntur 1, 2, 1. Pariterque, ſi idem exponens m ſit 3, invenientur quatuor tantum coefficientes 1, 3, 3, 1.

825. Hujus rei ratio exinde eſt repetenda, quod omnis quantitas, per zero multiplicata, fit etiam zero. Nam, ubi m eſt 2, valet $m - 2$ tantundem, ac zero: proindeque negligi debent omnes illi coefficientes, in quibus reperitur $m - 2$. Atque ita quoque, quum m eſt 3, nulla ratio haberi debet eorum coefficientium, in quibus extat $m - 3$; quandoquidem $m - 3$ perinde valet, ac zero. Unde liquido patet, pro qualibet poteſtate tantam fieri coefficientium multitudinem, quotus eſt numerus ſuorum terminorum.

IV. Poteſtatum formula generalis exhibetur.

826. EXpreſſis generaliter, ac indefinite, tum terminis cujuſque poteſtatis ex radice binomia, cum coefficientibus, qui ad terminos illos referuntur; haud difficile modo erit, ipſam poteſtatum formulam generalem exhibere. Afficiantur etenim ordine ſingu-

li termini propriis ſuis coefficientibus. Et ſiquidem iidem termini iis ſignis inter ſe mutuo conjungantur, quæ multiplicationis exigunt regulæ; jam quæſita formula orietur.

827. Sint ergo a, & b partes radicis binomiæ. Et elevanda ſit radix iſta ad eam poteſtatem, cujus exponens eſt numerus m. Per ea itaque,
*art. 801. quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, erit a^m primus terminus quæſitæ poteſtatis, $a^{m-1}b$ terminus ſecundus, $a^{m-2}b^2$ terminus tertius, $a^{m-3}b^3$ terminus quartus, atque ita deinceps. Et, ut vidi-
*art. 823 mus paulo ante *, erit 1 coefficiens primi termini, $m:1$ coefficiens ſecundi termini, $(m.m-1):(1.2)$ coefficiens termini tertii, $(m.m-1.m-2):(1.2.3)$ coefficiens termini quarti, atque ita in infinitum.

828. Afficiantur modo ſinguli termini ſuis propriis coefficientibus. Et fiet quæſitæ poteſtatis $1a^m$ pars prima, $ma^{m-1}b:1$ pars ſecunda, $(m.m-1)\,a^{m-2}b^2:(1.2)$ pars tertia, $(m.m-1.m-2)\,a^{m-3}b^3:(1.2.3)$ pars quarta, ſicque deinceps. Unde, non aliud ſupereſt, quam ut partes iſtæ iis ſignis ſimul connectantur, quæ multiplicationis exigit opus, hoc eſt, quæ requirunt producta ex inferioribus poteſtatibus ipſarum partium a, & b.

829. Hunc in finem meminiſſe oportet eo-
*art. 311. rum, quæ ſuperius * dicta ſunt: nimirum poteſtates pares eſſe ſemper poſitivas, ſive poſitivæ ſint radices ipſarum, ſive negativæ; ſed non item poteſtates impares: ut quæ eſſe debent ejuſdem generis cum radicibus ipſis, ad quas referuntur; hoc eſt poſitivæ, quum radices ſunt poſitivæ & negativæ, quum per contrarium negativæ ſunt ipſæ radices.

830.

830. Hinc itaque liquet, partes omnes formulæ generalis eſſe ſimul conjungendas ſigno $+$, quum radix binomia, ad quam refertur, eſt $a + b$. Sed, ſi eadem radix binomia fuerit $a - b$; tunc evidens eſt, mutanda eſſe ſigna iis partibus, in quibus quantitatis negativæ $- b$ poteſtates impares occurrunt; cujuſmodi profecto ſunt eæ omnes, quæ locis paribus poſitæ reperiuntur.

831. Si ergo radicis binomiæ $a + b$ quæratur ea poteſtas, quam deſignat generaliter, ad indefinite numerus m; illa erit $1a^m + ma^{m-1}b : 1 + (m . m - 1) a^{m-2}b^2 : (1 . 2) + (m . m - 1 . m - 2) a^{m-3}b^3 : (1 . 2 . 2) +$ &c. Quod ſi vero quæratur poteſtas non diſſimilis radicis binomiæ $a - b$; ea fiet $1a^m - ma^{m-1}b : 1 + (m . m - 1) a^{m-2}b^2 : (1 . 2) - (m . m - 1 . m - 2) a^{m-3}b^3 : (1 . 2 . 3) +$ &c. Sed utroque caſu poterunt partes quæſitæ poteſtatis eleganter contrahi in hunc modum.

832. Vocetur c quotiens, qui oritur, dividendo ſecundam partem b per primam a. Et quoniam quotiens, in multiplicatorem ductus, reſtituit dividendum, erit ac æqualis ipſi b. Ponatur deinde in ſingulis partibus ac loco ipſius b; & fiet $ma^m c : 1$ pars ſecunda, $(m . m - 1) a^m c^2 : (1 . 2)$ pars tertia, $(m . m - 1 . m - 2) a^m c^3 : (1 . 2 . 3)$ pars quarta, atque ita deinceps.

833. Sed ſingulæ iſtæ partes poſſunt ulterius contrahi. Quum enim pars prima ſit $1a^m$, & pars ſecunda $ma^m c : 1$; liquet partem primam eſſe ad partem ſecundam, ut 1 ad $mc : 1$. Quare, ſi pars prima dicatur d, fiet pars ſecunda $mcd : 1$. Et ſimiliter, quia pars ſecunda eſt $ma^m c : 1$, & pars tertia eſt $(m . m - 1) a^m c^2 : (1 . 2)$; liquet,

partem ſecundam eſſe ad partem tertiam, ut eſt 1 ad $(m-1)c:2$. Unde, ſi pars ſecunda vocetur e, fiet pars tertia $(m-1)ce:2$.

834. Eadem ratione, quoniam pars tertia eſt $(m.m-1)a^mc^2:(1.2)$, itemq; pars quarta eſt $(m.m-1.m-2)a^mc^3:(1.2.3)$; liquet, partem tertiam eſſe ad partem quartam, ut eſt 1 ad $(m-2)c:3$. Quocirca, ſi pars tertia dicatur f, fiet pars quarta $(m-2)cf:3$. Atque ita quoque, quia pars quarta eſt $(m.m-1.m-2\ a^mc^3:(1.2.3.)$, & pars quinta eſſe debet $(m.m-1.m-2.m-3)a^mc^4:(1.2.3.4)$; liquet, partem quartam eſſe ad partem quintam, ut eſt 1 ad $(m-3)c:4$. Quare, ſi pars quarta dicatur g, fiet pars quinta $(m-3)cg:4$.

835. Si ergo radix binomia, elevanda ad poteſtatem, cujus exponens eſt m, ſit $a+ac$; erit poteſtas quæſita $1a^m+mdc:1+(m-1)ec:2+(m-2)fc:3+(m-3)gc:4+$ &c. Quod ſi vero ſit $a-ac$, eadem poteſtas erit $1a^m-mdc:1+(m-1)ec:2-(m-2)fc:3+(m-3)gc:4$ &c. Verum in utroque caſu illud obſervandum eſt, quod, ſicuti in radice binomia c refert quotientem, qui *oritur*, dividendo ſecundam partem per primam; *ita in* ipſa ejus radicis poteſtate d, e, f, g, &c. referunt ordine partes ipſius primam, ſecundam, tertiam, quartam, &c.

836. Patet autem, in utroque caſu partes poteſtatis certa, ac præfinita lege in infinitum abire. Quum enim litteræ d, e, f, g, &c. referant partes, quæ proxime præcedunt eas, in quibus litteræ illæ reperiuntur; & c ſit quotiens, qui ori-

oritur, dividendo ſecundam partem radicis, per primam: liquet, unamquamque partem poteſtatis eſſe ad ſuam ſubſequentem in ratione compoſita ex prima parte radicis ad ſecundam, & ex numero, locum partis indicante, ad exponentem poteſtatis, auctum unitate una, & eodem numero diminutum.

V. Formulæ uſus in conficiendis poteſtatibus oſtenditur.

837. Exhibita poteſtatum vulgarium formula generali, oſtendamus modo uſum ejus in caſibus ſpecialibus, & videamus, quo pacto, ea mediante, radix binomia ad quamcumque datam poteſtatem evehi poſſit. Id itaque obtinetur, ſcribendo prius in formula generali primam partem radicis binomiæ propoſitæ loco *a*; quotientem, qui oritur, dividendo ſecundam partem per primam, loco *c*; & exponentem quæſitæ poteſtatis loco *m*. Nam, ſi deinde loco ipſarum *d*, *e*, *f*, *g*, &c. valores ſui reponantur, ſignis probe obſervatis, habebitur poteſtas quæſita.

838. Fieri autem debet hujuſmodi ſubſtitutio uſque donec ad eam partem formulæ generalis perventum fuerit, quæ evaneſcit, ſubrogando loco *m* valorem ſuum. Nam, quum pars iſta in omnibus aliis, quæ ipſam excipiunt, reperiatur poſita per multiplicationem; eæ quoque evaneſcent, & fient nihilo æquales. Unde haud quidem neceſſe eſt, ulterius progredi; ſed ſiſtendum in ea parte, quæ prima omnium evaneſcit.

839. Proponatur, exempli gratia, elevanda ad

ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem radix binomia $p+x$. Quoniam partes ejus ſunt ſimul conjunctæ ſigno $+$, eligenda eſt formula generalis, quæ refertur ad $a+ac$, nimirum $1a^m + mdc : 1 + (m-1)ec : 2 + (m-2)fc : 3 + (m-3)gc : 4 +$ &c.; & ſcribendum eſt in ea p loco a, $x : p$ loco c, & 2 loco m.

840. Jam, hujuſmodi ſubſtitutionibus, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $1p^2$, ſecunda $+mdc : 1$ fiet $+2dx : 1p$, tertia $+(m-1)ec : 2$ evadet $+1ex : 2p$, & quarta $+(m-2)fc : 3$ evaneſcet. Quare in caſu, de quo agitur, formula generalis mutabitur in iſtam $1p^2 + 2dx : 1p + 1ex : 2p$. Ponatur deinde $1p^2$ loco d, & $2dx : 1p$, ſive etiam $2px$ loco e. Et fiet quadratum quæſitum $1p^2 + 2px + 1x^2$.

841. Oporteat, eandem radicem binomiam $p+x$ elevare ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem. Aſſumatur rurſus formula generalis, quæ refertur ad $a+ac$, nimirum $1a^m + mdc : 1 + (m-1)ec : 2 + (m-2)fc : 3 + (m-3)gc : 4 +$ &c.; & in ea ſcribatur quidem p loco a, & $x : p$ loco c, verum pro m ſubſtituatur numerus 3, qui eſt exponens quæſitæ poteſtatis.

842. Hujuſmodi ergo ſubſtitutionibus, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $1p^3$, ſecunda $+mdc : 1$ evadet $+3dx : 1p$, tertia $+(m-1)ec : 2$ prodibit $+2ex : 2p$, quarta $+(m-2)fc : 3$ vertetur in $1fx : 3p$, & quinta demum evaneſcet. Quare in propoſito exemplo formula generalis mutabitur in iſtam $1p^3 + 3dx : 1p + 2ex : 2p + 1fx : 3p$. Ponantur deinde loco d, e, f valores ſui. Et fiet cubus quæſitus $1p^3 + 3p^2x + 3px^2 + 1x^3$.

843. Quod ſi autem elevanda ſit ad quadratum,

tum, ſeu ſecundam poteſtatem radix binomia $p - x$; tunc, ob partes ejus ſimul conjunctas ſigno $-$, eligenda eſt formula generalis, quæ refertur ad $a - ac$, nimirum $1a^m - mdc : 1 + (m - 1) ec : 2 - (m - 2) fc : 3 + (m - 3) gc : 4 -$ &c.; ac in ea ſcribendum eſt pariter p loco a, $x : p$ loco c, & 2 loco m.

844. Jam, per haſce ſubſtitutiones, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $1p^2$, ſecunda $- mdc : 1$ fiet $- 2dx : 1p$, tertia $+ (m - 1) ec : 2$ evadet $1ex : 2p$, & quarta demum $- (m - 2) fc : 3$ evaneſcet. Quare in caſu, de quo eſt quæſtio, formula generalis mutabitur in iſtam $1p^2 - 2dx : 1p + 1ex : 2p$. Ponatur deinde $1p^2$ loco d, & $2dx : 1p$, ſive etiam $2px$ loco e. Et quadratum quæſitum erit $1p^2 - 2px + 1x^2$.

845. Similiter, ſi radix binomia $p - x$ elevanda ſit ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem, confugere rurſus oportet ad formulam generalem, quæ refertur ad $a - ac$, nimirum ad $a^m - mdc : 1 + (m - 1) ec : 2 - (m - 2) fc : 3 + (m - 3) gc : 4 -$ &c. Et quamquam in ea ſcribendum ſit adhuc p loco a, & $x : p$ loco c; tamen loco m ſubſtitui debet numerus 3, qui eſt tertiæ poteſtatis exponens.

846. Fiant ergo ſubſtitutiones iſtæ, & formulæ generalis prima pars $1a^m$ fiet $1p^3$, ſecunda $- mdc : 1$ evadet $- 3dx : 1p$, tertia $+ (m - 1) ec : 2$ vertetur in $+ 2ex : 2p$, quarta $- (m - 2) fc : 3$ prodibit $- 1fx : 3p$, & quinta demum $+ (m - 3) gc : 4$ abibit in nihilum. Quare in hoc alio caſu formula generalis mutabitur in hanc aliam $1p^3 - 3dx : 1p + 2ex : 2p - 1fx : 3p$. Ponantur deinde loco d, e, f valores ſui. Et erit

$1p^3$

$1p^3 - 3p^2x + 3px^2 - 1x^3$ cubus, qui quæritur.

847. Cæterum, ope earum formularum, ad quamcumque poteſtatem evehi poterit, non modo radix, quæ duabus partibus conſtat, verum etiam radix, quæ plures, quam duas, partes comprehendit: ſcilicet, ſi omnes partes priores, velut una, conſiderentur. Ita, ſi radix, ad poteſtatem quamvis elevanda, ſit $p - q + x$, quæ ex tribus partibus componitur; conſiderandæ ſunt priores duæ $p - q$ velut una, & ſcribendum eſt in formula generali $p - q$ loco a, & $x:(p - q)$ loco c.

848. Quod ut liquido conſtet, proponatur elevanda radix $p - q + x$ ad quadratum. Jamque, ſi in formula generali, quæ refertur ad $a + ac$, ſcribatur $p - q$ loco a, $x:(p - q)$ loco c, & 2 loco m; pars ejus prima $1a^m$ fiet $1(p - q)^2$, pars ſecunda $+ mdc:1$ evadet $+ 2dx:1(p - q)$, pars tertia $+ (m - 2)ec:2$ prodibit $1ex:2(p - q)$, & pars quarta $+ (m - 2)fc:3$ omnino evaneſcet. Quare ipſa formula generalis vertetur in iſtam $1(p - q)^2 + 2dx:1(p - q) + 1ex:2(p - q)$.

849. Et quoniam in caſu iſto valor ipſius d eſt $1(p - q)^2$; erit $+ 2dx:1(p - q)$ idem, ac $+ 2x(p - q)^2:1(p - q$ ſive $+ 2x(p - q)$; & $+ 1ex:2(p - q)$ idem, ac $+ 2x^2(p - q):2(p - q)$, ſive $1x^2$. Unde quadratum ex $p - q + x$ erit $1(p - q)^2 + 2x(p - q) + 1x^2$. Eſt autem $(p - q)^2$ idem, ac $+ 1p^2 - 2pq + 1q^2$; & $+ 2x(p - q)$ idem, ac $2px - 2qx$. Quare quadratum quæſitum erit $1p^2 - 2pq + 1q^2 + 2px - 2qx + 1x^2$.

850.

850. Elevanda ſit quoque eadem radix $p - q + x$ ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem. Scribatur rurſus in formula generali, quæ refertur ad $a + ac$, $p - q$ loco a, & $x : (p - q)$ loco c; ſed loco m ponatur numerus 3. Vertetur ergo formula generalis in iſtam $1 (p - q)^3 + 3dx : 1 (p - q)^2 + 2ex : 2(p - q) + 1fx : 3(p - q)$; adeoque, poſitis loco d,e,f valoribus ſuis, fiet cubus quæſitus $1 (p - q)^3 + 3x (p - q)^2 + 3x^2 (p - q) + 1x^3$, hoc eſt $1p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - 1q^3 + 3p^2x - 6pqx + 3q^2x + 3px^2 - 3qx^2 + 1x^3$.

851. Patet autem, non poſſe fieri poteſtates ex radicibus, quæ plures habent partes, quam duas, niſi prius innotuerit, qua ratione fiant ex radicibus, quæ partes continent, una pauciores. Ita nequit fieri quadratum ex $p - q + x$, niſi antea conſtiterit, quo pacto illud fiat ex $p - q$. Et ſimiliter, ut formetur cubus ex $p - q + x$, ſcire prius oportet, qua ratione fiat, tam quadratum, quam cubus ex $p - q$. Sed, totum obtineri poſſe eodem tempore per eaſdem illas formulas generales; liquet abunde.

CAPUT III.

Uſus formulæ præcedentis in conficiendis ſeriebus infinitis.

852. Quamquam formula generalis, præcedenti capite exhibita, pro iis tantum poteſtatibus conſtructa videatur, quæ vulgares ſunt, & dicuntur perfectæ poſitivæ

ea-

eadem tamen uſui etiam nobis eſſe poteſt, pro aliis poteſtatum ſpeciebus, quas ſuperius conſideravimus: adeo, ut ſicuti expreſſio iſta a^m potis eſt nobis exhibere omnes omnino poteſtates ipſius a, ſive ſint perfectæ, ſive imperfectæ, ſive poſitivæ, ſive negativæ; ſic pariter in formula illa generali reperire licebit quamcumque poteſtatem radicis binomiæ, ad quam ea refertur.

853. Poſſe autem exhiberi per a^m omnes poteſtates ipſius a; id ſane nullam difficultatem facit. Ut enim in ea expreſſione exponens generalis m nihil certi, ac determinati ſignificat; ita per eum omnes quoſcumque numeros, ſive poſitivos, ſive negativos, ſive integros, ſive fractos, repræſentare fas erit. Unde, ſicuti, quum pro m ſcribitur 2, fit a^m idem, ac a^2; ita, ſcribendo -1 pro m, valebit a^m idem, ac a^{-1}. Et ad eundem modum, ſi pro m ponatur, vel $1:2$, vel $-1:2$: fiet a^m, vel $a^{1:2}$, vel $a^{-1:2}$.

854. Mirum vero cenſeri debet, quod in formula illa generali omnes omnino poteſtates contineantur radicis binomiæ, ad quam ea refertur. Nam, etſi exponens m etiam in illiuſmodi formula nihil certi, ac determinati ſignificet; attamen, attenta conſtructione ipſius formulæ, videtur, non alios numeros loco ejus exponentis ſcribi poſſe, quam qui ſunt integri ſimul, & poſitivi. Aſſerti ergo veritate exemplis prius comprobata, unde ejus ratio ſit repetenda, paucis deinceps oſtendemus.

855. Ex eo autem, quod allata formula generalis uſui nobis eſſe poteſt, non modo pro poteſtatibus vulgaribus, verum etiam pro aliis omnibus, quas ſuperius conſideravimus; poterunt

runt ope ejus nullo negotio fieri, tam ſeries infinitæ, quæ oriuntur a diviſione, quam quæ ab extractione radicum ſuam trahunt originem. Unde, ſicuti partes ejus formulæ certo, ac conſtanti ordine in infinitum * progrediuntur; ſic & termini utriuſque generis ſerierum, non vaga, ac indeterminata quad[illegible]tione, ſed certa, ac conſtanti lege in infinitum abibunt. *art. 836.

I. *Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ oriuntur a diviſione.*

856. Quum radix aliqua binomia elevanda eſt ad poteſtatem quamvis perfectam poſitivam, vidimus ſupra *, non aliud fieri debere, quam ſcribere in formula generali pro a primam partem radicis, pro c quotientem, qui oritur, dividendo ſecundam partem per primam, pro m exponentem quæſitæ poteſtatis, & pro d, e, f, g, &c. valores ſuos. Jam, ſi hoc idem fiat, quum eadem radix binomia elevanda eſt ad poteſtatem aliquam perfectam negativam; adhuc optata poteſtas obtinebitur. *art. 837.

857. Oporteat namque, exempli gratia, radicem binomiam $p + x$ evehere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $- 1$. Capiatur formula generalis $1a^m + mdc : 1 + (m - 1) ec : 2 + (m - 2) fc : 3 + (m - 3) gc : 4 +$ &c., quæ refertur ad $a + ac$; & in ea ſcribatur p pro a, $x : p$ pro c, & $- 1$ pro m. Mutabitur ergo, ſubſtitutionibus hiſce, generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-1} - 1dx : 1p - 2ex : 2p - 3fx : 3p - 4gx : 4p -$ &c., ſive etiam $1 : p - dx : p - ex : p - fx : p - gx : p -$ &c. Unde, poſitis loco

d, e,

d, e, f, g, &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet poteſtas quæſita $1 : p - x : p^2 + x^2 : p^3 - x^3 : p^4 + x^4 : p^5 -$ &c.

858. Eſſe vero $1 : p - x : p^2 + x^2 : p^3 - x^3 : p^4 + x^4 : p^5 -$ &c. eam poteſtatem radicis binomiæ $p + x$, quam deſignat exponens -1; oſtendi poteſt [illegible]unc modum. Per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, $(p + x)^{-1}$ tantundem valet, ac $1 : (p + x)$. Itaque idem erit, quantitatem $p + x$ ad eam poteſtatem attollere, quam dividere unitatem per eandem illam quantitatem $p + x$. Sed, inſtituta diviſione iſta, eademque in infinitum continuata, oritur quotiens $1 : p - x : p^2 + x^2 : p^3 - x^3 : p^4 + x^4 : p^5 -$ &c. Quare hic idem quotiens erit ea poteſtas radicis binomiæ $p - x$, quæ habet pro ſuo exponente -1.

* art. 761.

859. Oporteat ſimiliter, radicem binomiam $p - x$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit -2. Aſſumatur formula generalis $1a^m - mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 - (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 -$ &c., quæ refertur ad $a - ac$; & in ea ſcribatur p pro a, $x : p$ pro c, & -2 pro m. Per haſce ergo ſubſtitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-2} + 2dx : 1p - 3ex : 2p + 4fx : 3p - 5gx : 4p +$ &c., ſive etiam $1 : p^2 + 2dx : p - 3ex : 2p + 4fx : 3p - 5gx : 4p +$ &c. Quare, poſitis loco d, e, f, g, &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet quæſita poteſtas $1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 +$ &c.

860. Quod autem $1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 +$ &c. eſt ea poteſtas radicis binomiæ $p - x$, quam refert expo-

nens

nens -2; demonſtratur hac ratione. Ex ſuperius * oſtenſis $(p-x)^{-2}$ perinde valet, ac $1:(p-x)^2$, ſive etiam $1:(p^2-2px+x^2)$. Quare idem erit, quantitatem $p-x$ ad eam poteſtatem evehere, quam dividere unitatem per quadratum ejus quantitatis, hoc eſt per $p^2-2px+x^2$. Jam vero, per iſtiuſmodi diviſionem, in infinitum continuatam, oritur quotiens $1:p^2+2x:p^3+3x^2:p^4+4x^3:p^5+5x^4:p^6+$ &c. Itaque idem hic quotiens erit ea poteſtas radicis binomiæ $p-x$, quæ habet pro ſuo exponente -2. *art.761.

861. Id vero quum ita ſit, liquet, mediante formula illa generali, nullo negotio confici poſſe ſeries infinitas, quæ a diviſione oriuntur. Oporteat enim, exempli gratia, in ſeriem infinitam convertere fractionem $x^2:(p+x)$. Jam fractio iſta oritur, multiplicando x^2 per $1:(p+x)$. Unde, quia $1:(p+x)$ tantundem valet *, ac $(p+x)^{-1}$; ſatis erit, denominatorem propoſitæ fractionis $(p+x)$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit -1, & multiplicare omnes ejus terminos per numeratorem x^2. Quum ergo ea poteſtas radicis binomiæ $p+x$ ſit* $1:p-x:p^2+x^2:p^3-x^3:p^4+x^4:p^5-$ &c.; erit $x^2:p-x^3:p^2+x^4:p^3-x^5:p^4+x^6:p^5-$ &c. ſeries infinita, in quam convertitur propoſita fractio. *art.761. *art.857.

862. Similiter convertenda ſit in ſeriem infinitam fractio $x^3:(p-x)^2$, quæ oritur, multiplicando x^3 per $1:(p-x)^2$. Quoniam $1:(p-x)^2$ perinde valet *, ac $(p-x)^{-2}$; erit $x^3:(p-x)^2$ idem, ac $x^3(p-x)^{-2}$. Quum autem ea poteſtas radicis binomiæ $p-x$, quam *art.761.

designat -2, ſit * $1:p^2+2x:p^3+3x^2:p^4+4x^3:p^5+5x^4:p^6+$ &c.; fiet $x^3:p^2+2x^4:p^3+3x^5:p^4+4x^6:p^5+5x^7:p^6+$ &c. valor ipſius $x^3(p-x)^{-2}$. Quare ſeries infinita, ad quam reducitur fractio $x^3:(p-x)^2$, erit $x^3:p^2+2x^4:p^3+3x^5:p^4+4x^6:p^5+5x^7:p^6+$ &c.

* Art. 859.

863. Quod ſi denominator fractionis, quæ in ſeriem converti debet, contineat plures numero partes, quam duas: ponendo unam ex eis loco a, & reliquas omnes, per illam diviſas, loco c; adhuc, mediante formula illa generali, quæſita ſeries obtinebitur. Ut, ſi convertenda ſit in ſeriem fractio $x^2:(p-x+q)$, ſive etiam $x^2(p-x+q)^{-1}$, ſcribendo p pro a, $(x-q):p$ pro c, & -1 pro m, fiet $(p-x+q)^{-1}$ æqualis huic ſeriei $1:p+(x-q):p^2+(x-q)^2:p^3+(x-q)^3:p^4+$ &c.; adeoque erit $x^2:p+x^2(x-q):p^2+x^2(x-q)^2:p^3+x^2(x-q)^3:p^4+$ &c. ſeries, in quam convertitur fractio $x^2:(p-x+q)$.

864. Sed, pro convertenda in ſeriem eadem fractione, ſcribi quoque poteſt q loco a, & $(x-p):q$ loco c. Sic vero fiet $(p-x+q)^{-1}$ æqualis alteri huic ſeriei $1:q+(x-p):q^2+(x-p)^2:q^3+(x-p)^3:q^4+$ &c.: proindeque fractio propoſita $x^2:(p-x+q)$ convertetur in hanc aliam ſeriem $x^2:q+x^2(x-p):q^2+x^2(x-p)^2:q^3+x^2(x-p)^3:q^4+$ &c. Tentandus eſt autem uterque caſus, iſque eligendus, qui ſeriem, citius convergentem ad valorem ejus fractionis nobis ſuppeditat.

II. Uſus

II. Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ oriuntur ab extractione radicum.

865. NOn diſſimilis eſt uſus formulæ generalis, ſi radix aliqua binomia elevanda ſit ad poteſtatem quamvis imperfectam poſitivam. Neque enim aliud fieri debet, quam ſcribere in formula illa pro a primam partem radicis, pro c quotientem, qui oritur, dividendo ſecundam partem per primam, pro m exponentem quæſitæ poteſtatis, & pro d, e, f, g, &c valores ſuos, ſignis probe obſervatis. Nam, hujuſmodi ſubſtitutionibus peractis, ſtatim emerget poteſtas, ad quam propoſita radix eſt elevanda.

866. Oporteat, exempli gratia, radicem binomiam $p^2 + x^2$ evehere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $1:2$. Capiatur formula generalis $1a^m + mdc:1 + (m-1)ec:2 + (m-2)fc:3 + (m-3)gc:4 +$&c., quæ refertur ad $a + ac$; & in ea ſcribatur p^2 pro a, $x^2:p^2$ pro c, & $1:2$ pro m. Mutabitur ergo, ſubſtitutionibus hiſce, generalis illa formula in hanc aliam $1p + 1dx^2 : 2p^2 - 1ex^2 : 4p^2 - 1fx^2 : 2p^2 - 5gx^2 : 8p^2 -$ &c. Unde, poſitis loco d, e, f, g, &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet poteſtas quæſita $1p + 1x^2 : 2p - 1x^4 : 8p^3 + 1x^6 : 16p^5 - 5x^8 : 128p^7 +$ &c.

867. Eſſe vero $1p + 1x^2 : 2p - 1x^4 : 8p^3 + 1x^6 : 16p^5 - 5x^8 : 128p^7 +$ &c. eam poteſtatem radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quam deſignat exponens $1:2$; oſtendi poteſt in hunc modum. Per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, $(p^2 + x^2)^{1:2}$ tantundem valet, ac $\surd(p^2 + x^2)$. Ita- *art.772

que idem erit, quantitatem $p^2 + x^2$ ad eam poteſtatem attollere, quam ex eadem quantitate quadratam radicem extrahere. Sed, extractione hujus radicis, emergit quantitas $1p + 1x^2 : 2p - 1x^4 : 8p^3 + 1x^6 : 16p^5 - 5x^8 : 128p^7 +$ &c. Quare hæc eadem quantitas erit ea poteſtas radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quæ habet pro ſuo exponente $1 : 2$.

868. Oporteat ſimiliter, radicem binomiam $p^3 - x^3$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $1 : 3$. Aſſumatur formula generalis $1a^m - mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 - (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 -$ &c., quæ refertur ad $a - ac$; & in ea ſcribatur p^3 pro a, $x^3 : p^3$ pro c, & $1 : 3$ pro m. Per haſce ergo ſubſtitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p - 1dx^3 : 3p^3 - 1ex^3 : 3p^3 + 5fx^3 : 9p^3 - 2gx^3 : 3p^3 +$ &c. Quare, poſitis loco $d, e, f, g,$ &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet quæſita poteſtas $1p - 1x^3 : 3p^2 - 1x^6 : 9p^5 - 5x^9 : 81p^8 - 10x^{12} : 243p^{11} -$ &c.

869. Quod autem $1p - 1x^3 : 3p^2 - 1x^6 : 9p^5 - 5x^9 : 81p^8 - 10x^{12} : 243p^{11} -$ &c. eſt ea poteſtas radicis binomiæ $p^3 - x^3$, quam refert exponens $1 : 3$; demonſtratur hac ratione.
*art.770. Ex ſuperius * oſtenſis $(p^3 - x^3)^{1:3}$ perinde valet, ac $\sqrt[3]{(p^3 - x^3)}$. Quare idem erit, quantitatem $p^3 - x^3$ ad eam poteſtatem evehere, quam extrahere radicem cubicam ex eadem illa quantitate. Jam vero, per extractionem hujus cubicæ radicis, oritur quantitas $1p - 1x^3 : 3p^2 - 1x^6 : 9p^5 - 5x^9 : 81p^8 - 10x^{12} : 243p^{11} -$ &c. Itaque hæc eadem quantitas erit ea poteſtas radicis binomiæ $p^3 - x^3$, quæ habet pro ſuo exponente $1 : 3$.

870.

870. Ex quibus modo, liquet, beneficio ejuſdem formulæ generalis, nullo item negotio fieri poſſe ſeries illas infinitas, quæ ab extractione radicum ſuam trahunt originem; quandoquidem perinde eſt, ex quantitate aliqua radicem quamcumque extrahere, ac eandem illam quantitatem ad poteſtatem aliquam imperfectam poſitivam attollere. Nolim autem miremini, quod radicem binomiam aſſumpſimus $p^2 + x^2$, quum elevanda erat ad poteſtatem, deſignatam ab $1:2$; & $p^3 - x^3$, quum oportebat eam attollere ad poteſtatem, expreſſam per $1:3$. Id enim unice factum, ne poteſtatum termini quantitates radicales involverent. Et cæteroquin poterat ad poteſtates illas attolli radix binomia $p + x$, vel $p - x$.

871. Quod ſi quantitas, convertenda in ſeriem per radicis alicujus extractionem, contineat plures numero partes, quam duas: ponendo unam ex eis loco a, & reliquas omnes, per illam diviſas, loco c; adhuc, mediante formula illa generali, quæſita ſeries obtinebitur. Ut, ſi converti debeat in ſeriem quantitas radicalis $\surd(p^2 + q^2 - x^2)$, ſive etiam $(p^2 + q^2 - x^2)^{1:2}$, ſcribi poterit p^2 loco a, $(q^2 - x^2):p^2$ loco c, & $1:2$ loco m. Qua ratione fiet ſeries quæſita $1p + 1(q^2 - x^2):2p - 1(q^2 - x^2)^2:8p^3 + 1(q^2 - x^2)^3:16p^5 - 5(q^2 - x^2)^4:128p^7 +$ &c.

872. Sed, pro convertenda in ſeriem eadem quantitate radicali, ſcribi quoque poteſt q^2 loco a, & $(p^2 - x^2):q^2$ loco c. Sic vero fiet $1q + 1(p^2 - x^2):2q - 1(p^2 - x^2)^2:8q^3 + 1(p^2 - x^2)^3:16q^5 - 5(p^2 - x^2)^4:128q^7 +$ &c.

&c. ſeries quæſita. Tentandus eſt autem uterque caſus, iſque eligendus, qui ſeriem citius convergentem nobis ſuppeditat. Nam eæ ſeries ſemper * præferri debent, quæ ad valorem quæſitæ quantitatis, non modo propius ſemper, ac propius accedunt, ſed citius ad eum convergunt.

* art. 565.

III. Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ ex utroque fonte oriuntur.

873. Ope ejuſdem formulæ generalis, poterit radix aliqua binomia evehi quoque ad poteſtatem quamvis imperfectam negativam. Et habebitur poteſtas quæſita, ſcribendo ſimiliter in formula illa generali pro a primam partem propoſitæ radicis, pro c quotientem, qui oritur, dividendo ſecundam partem per primam, & pro d, e, f, g, &c. valores ſuos, ſignis probe obſervatis: adeo, ut uſus formulæ ejus generalis erit ſemper idem, cujuſcumque ſpeciei ſit poteſtas, ad quam radix binomia eſt elevanda.

874. Oporteat, exempli gratia, radicem binomiam $p^2 + x^2$ evehere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-1:2$. Capiatur formula generalis $1a^m + mdc:1 + (m-1)ec:2 + (m-2)fc:3 + (m-3)gc:4 +$ &c., quæ refertur ad $a + ac$; & in ea ſcribatur p^2 pro a, $x^2:p^2$ pro c, & $-1:2$ pro m. Mutabitur ergo, ſubſtitutionibus hiſce, generalis illa formula, in hanc aliam $1p^{-1} - 1dx^2:2p^2 - 3ex^2:4p^2 - 5fx^2:6p^2 - 7gx^2:8p^2 -$ &c., ſive etiam $1:p - 1dx^2:2p^2 - 3ex^2:4p^2 - 5fx^2:6p^2 - 7gx^2:8p^2 -$ &c. Unde, poſitis loco d, e, f, g, &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet poteſtas

quæ-

quæſita $1:p - 1x^2:2p^3 + 3x^4:8p^5 - 5x^6:16p^7 + 35x^8:128p^9 -$ &c.

875. Eſſe vero $1:p - 1x^2:2p^3 + 3x^4:8p^5 - 5x^6:16p^7 + 35x^8:128p^9 -$ &c. eam poteſtatem radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quam deſignat exponens $-1:2$; oſtendi poteſt in hunc modum. Per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, $(p^2 + x^2)^{-1:2}$ tantundem valet, ac $1:\surd(p^2 + x^2)$. Itaque idem erit, quantitatem $p^2 + x^2$ ad eam poteſtatem attollere, quam, extracta radice quadrata ex eadem quantitate, dividere unitatem per ſeriem, inde emergentem. Sed, per eam radicis extractionem, & per diviſionem iſtam, oritur quantitas $1:p - 1x^2:2p^3 + 3x^4:8p^5 - 5x^6:16p^7 + 35x^8:128p^9 -$ &c. Quare hæc eadem quantitas erit ea poteſtas radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quæ habet pro ſuo exponente $-1:2$.

*art. 775.

876. Oporteat ſimiliter, radicem binomiam $p^3 - x^3$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-1:3$. Aſſumatur formula generalis $1a^m - mdc:1 + (m-1)ec:2 - (m-2)fc:3 + (m-3)gc:4 -$ &c., quæ refertur ad $a - ac$, & in ea ſcribatur p^3 pro a, $x^3:p^3$ pro c, & $-1:3$ pro m. Per haſce ergo ſubſtitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-1} + 1dx^3:3p^3 - 2ex^3:3p^3 + 7fx^3:9p^3 - 5gx^3:6p^3 +$ &c. Quare, poſitis loco d, e, f, g, &c. valoribus ſuis, ſignis probe obſervatis, fiet quæſita poteſtas $1:p + 1x^3:3p^4 + 2x^6:9p^7 + 14x^9:81p^{10} + 35x^{12}:243p^{13} +$ &c.

877. Quod autem $1:p + 1x^3:3p^4 + 2x^6:9p^7 + 14x^9:81p^{10} + 35x^{12}:243p^{13} +$ &c. eſt ea poteſtas radicis binomiæ $p^3 - x^3$, quam refert

fert exponens $-1:3$; demonſtratur hac ratione. Ex ſuperius * oſtenſis $(p^3 - x^3)^{-1:3}$ perinde valet, ac $1 : \sqrt[3]{(p^3 - x^3)}$. Quare idem erit, quantitatem $p^3 - x^3$ ad eam poteſtatem evehere, quam extrahere radicem cubicam ex eadem quantitate, & per ſeriem, inde ortam, dividere unitatem. Jam vero, extracta radice illa, & diviſione iſta inſtituta, producitur quantitas $1 : p + 1x^3 : 3p^4 + 2x^6 : 9p^7 + 14x^9 : 81p^{10}$. $35x^{12} : 243p^{13} +$ &c. Itaque hæc eadem quantitas erit ea poteſtas radicis binomiæ $p^3 - x^3$, quæ habet pro ſuo exponente $-1:3$.

*art. 775.

878. Atque hinc modo patet, quod ſi quæ ſit ſeries, quæ oriatur, partim a diviſione, partim ab extractione radicum; hæc quoque, ope formulæ generalis, faciliime poteſt haberi. Sit enim convertenda in ſeriem fractio $x^2 : \sqrt{(p^2 + x^2)}$. Plane ſeries iſta, non aliter haberi poteſt, quam primo extrahendo radicem quadratam ex $p^2 + x^2$, deinde vero dividendo x^2 per radicem iſtam. Interim, quia $x^2 : \sqrt{(p^2 + x^2)}$ idem eſt *, ac $x^2(p^2 + x^2)^{-1:2}$; obtinebitur longe facilius eadem ſeries, ſi radix binomia $p^2 + x^2$ attollatur ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-1:2$, & omnes ejus termini multiplicentur per x^2.

*art. 761. 775.

879. Si fractio, convertenda in ſeriem, ſit $\sqrt{(p^2 + x^2)} : (p - x)$; hæc quoque, partim a diviſione, partim ab extractione radicum ſuam trahet originem. Verum in hoc caſu, primo quidem extrahenda eſt radix quadrata ex $p^2 + x^2$; tum deinde ſeries, inde orta, dividenda eſt per $p - x$. Effugies autem tædium utriuſque operationis, ſi ope formulæ generalis elevata, tum quantitate $p^2 + x^2$ ad poteſtatem, cujus exponens

neris ſit $1:2$, cum quantitate $p - x$ ad poteſtatem, cujus exponens ſit -1, multiplicentur omnes termini unius poteſtatis per omnes terminos alterius. Nam per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, $\surd(p^2 + x^2):(p - x)$ tantundem valet, ac $(p^2 + x^2)^{1:2}.(p - x)^{-1}$. *art. 761. 770.

880. Quid vero, ſi convertenda eſſet in ſeriem fractio $\surd(p^2 + x^2):\surd(p^2 - px)$. Sane primo oporteret, extrahere radicem quadratam ex $p^2 + x^2$; deinde radix non diſſimilis extrahenda foret ex $p^2 - px$; denique ſeries, inde ortæ, deberent per ſe mutuo dividi. Itaque immenſus erit calculi labor: qui tamen non parum minuetur, ſi ope formulæ generalis attollatur, tum quantitas $p^2 + x^2$ ad poteſtatem, cujus exponens ſit $1:2$, cum quantitas $p^2 - px$ ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-1:2$, & multiplicentur omnes termini unius per omnes terminos alterius; quandoquidem $\surd(p^2 + x^2):\surd(p^2 - px)$ idem eſt*, ac $(p^2 + x^2)^{1:2}.(p^2 - px)^{-1:2}$. *art. 761. 770. 775.

IV. *Series, figuratos numeros continentes, continuatæ, ac interpolatæ.*

881. OStendimus jam exemplis, quod poteſtatum vulgarium formula generalis ad alias quoque poteſtatum ſpecies ſe extendit, & uſui nobis eſſe poteſt, pro conficiendis ſeriebus infinitis, abſque diviſione, & extractione radicum. Videamus modo, unde evenit, ut ea tam late pateat, nec contineatur intra limites earum poteſtatum, pro quibus proprie conſtructa, ac efformata videtur. Res au-

tem

tem paulo altius eſt repetenda; & oſtendendum eſt prius, quomodo ſeries, figuratos numeros continentes, continuari poſſint ad partes oppoſitas, & interpolari aliorum terminorum interjectione.

882. Quamquam vero id fieri poſſit, relate ad figuratos cujuſcumque generis; oſtendetur hic tamen a nobis dumtaxat reſpectu figuratorum generis primi: idque, tum quia, pro re, de qua eſt quæſtio, hiſce tantum figuratis eſt opus; tum etiam, quia facile eſt, ad figuratos aliorum generum eandem theoriam extendere. Unde, ſemper ac deinceps figuratos numeros ſimpliciter appellabimus, non alii erunt intelligendi, quam qui ad primum genus referuntur, & quorum genitores ſunt numeri naturales, qui ex continua unitatum additione oriuntur.

883. Itaque primo, ſi quæſtio ſit de continuandis ſeriebus figuratorum ad partes oppoſitas, id factu facile erit. Jam enim ſeries numerorum naturalium continuatur ad partem contrariam per continuam unitatis ſubductionem: quo fit, ut primo quidem per zero, deinde vero per eoſdem numeros naturales, negative ſumptos, excurrat. Quare eadem pariter ratione continuandæ erunt ad partes contrarias ipſæ *figuratorum* ſeries: nimirum, ſubducendo ex terminis cujuſque ſeriei ordine terminos, qui eis correſpondent in ſerie præcedente.

884. Id autem agentes, comperiemus ſeriem figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c., continuatam ad partem oppoſitam, primo quidem per duas cyphras, tum per eoſdem figuratos, poſitive ſumptos, excurrere; viciſſim vero ſeriem figuratorum ſecundi ordinis 1, 4, 10,

20,

20, 35, &c., continuatam ad partem contrariam, primo quidem per tres cyphras, deinde per eoſdem figuratos, negative ſumptos, promoveri.

885. Comperiemus quoque, ſeriem figuratorum tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, &c., retro promotam, primo quidem per quatuor cyphras, tum per eoſdem figuratos, poſitive ſumptos, progredi; per contrarium vero ſeriem figuratorum quarti ordinis 1, 6, 21, 56, 126, &c., protractam ad partem oppoſitam, primo quidem per quinque cyphras, deinde per eoſdem figuratos, negative ſumptos, in infinitum abire.

886. Generaliter autem comperiemus, unamquamque ſeriem figuratorum, continuatam ad partem contrariam, excurrere primum per tot cyphras, quot deſignat exponens ordinis figuratorum, auctus unitate una; deinde vero progredi per eoſdem figuratos, ſumptos poſitive, ſi exponens ordinis figuratorum ſit numerus impar; ſumptos negative, ſi idem exponens ſit viciſſim numerus par.

887. Quod ſi interpolandæ ſint eædem ſeries, interjectione aliorum terminorum, conſiderare prius oportet, terminos cujuſque ſeriei ita quidem in infinitum promoveri, ut ſint arithmetice proportionales, termini ipſi in ſerie numerorum naturalium, eorum differentiæ primæ in ſerie figuratorum primi ordinis, eorundem differentiæ ſecundæ, ſive differentiarum differentiæ in ſerie figuratorum ſecundi ordinis, atque ita deinceps.

888. Ut igitur interpolatione lex ſeriei maneat eadem, neceſſe eſt interjectione aliorum terminorum ita quidem ſeries illas interpolare, ut termini interjecti cum terminis jam extanti-

bus

bus eadem pariter lege in infinitum progrediantur. Unde ſeries numerorum naturalium facili quidem negotio interpolabitur; quum facile ſit, inter terminos cujuſque progreſſionis arithmeticæ alios interponere, qui una cum iis progreſſionem ſimiliter arithmeticam conſtituant.

889. Ita, ſi inter duos quoſque terminos ſeriei numerorum naturalium alius tantum interjici debeat; ea erit, aſcendendo, o, 1 : 2, 1, 3 : 2, 2, 5 : 2, 3, &c.; deſcendendo, o, — 1 : 2, — 1, — 3 : 2, — 2, — 5 : 2, — 3, &c. Quod ſi vero interjiciendi ſint duo alii; fiet eadem, aſcendendo, o, 1 : 3, 2 : 3, 1, 4 : 3, 5 : 3, 2, 7 : 3, 8 : 3, 3, &c.; deſcendendo, o, — 1 : 3, — 2 : 3, — 1, — 4 : 3, — 5 : 3, — 2, — 7 : 3, — 8 : 3, — 3, &c. Atque ita quoque, interjectione quotcumque terminorum, ſemper eam ſeriem faciliime interpolare licebit.

890. Sed non perinde res eſt de ſeriebus numerorum ſiguratorum. In iis enim ſunt * arithmetice proportionales, non quidem ipſi termini; ſed eæ illorum differentiæ, quos exponens ordinis deſignat. Unde non ita facile interjectione aliorum terminorum poſſunt interpolari. Interim pro unaquaque ſerie, ſi in generali expreſſione cujuſque termini ponatur loco *m* terminus interjectus in ſerie numerorum naturalium, habebitur terminus, ordine interjiciendus in ſerie figuratorum, de qua agitur.

* art. 887.

891. Ita in ſerie figuratorum primi ordinis generalis expreſſio cujuſque termini eſt * $(m^2 + m) : 2$. Quare, ſi ſeries numerorum naturalium interpolata ſit o, 1 : 2, 1, 3 : 2, 2, 5 : 2, 3, &c.; habebuntur figurati primi ordinis, corre-

* art. 590. 594.

ſpon-

ſpondentes terminis interjectis $1:2$, $3:2$, $5:2$, &c., ponendo ſucceſſive loco m terminos iſtos in expreſſione generali. Qua ratione ipſa ſeries figuratorum primi ordinis, interjectione unius tantum termini interpolata, erit $0, 3:8, 1, 15:8, 3, 35:8, 6$, &c., in qua liquido patet, terminorum differentias primas $3:8$, $5:8$, $7:8$, $9:8$, $11:8$, $13:8$, &c. eſſe arithmetice proportionales.

892. Similiter in ſerie figuratorum ſecundi ordinis generalis expreſſio cujuſque termini eſt * $(m^3 + 3m^2 + 2m):6$. Itaque, ſi ſeries numerorum naturalium interpolata ſit $0, 1:2, 1, 3:2, 2, 5:2, 3$, &c.; invenientur figurati ſecundi ordinis, correſpondentes terminis interjectis $1:2$, $3:2$, $5:2$, &c., ſcribendo ſucceſſive loco m terminos iſtos in expreſſione generali. Qua ratione ipſa ſeries figuratorum ſecundi ordinis, inpolata interjectione unius tantummodo termini, erit $0, 5:16, 1, 35:16, 4, 105:16, 10$, &c., in qua, quum terminorum differentiæ primæ ſint $5:16$, $11:16$, $19:16$, $29:16$, $41:16$, $55:16$, &c., liquet, differentias ſecundas $6:16$, $8:16$, $10:16$, $12:16$, $14:16$, &c. eſſe arithmetice proportionales. *art 577. 591.

V. Demonſtratio traditæ interpolationis, & progreſſionum arithmeticarum proprietas ſingularis.

893. INterpolari ea, quam modo * innuimus, ratione ſeries figuratorum primi generis; primus omnium docuit Johannes Walliſius in præclaro ſuo opere de Arithmetica *art. 890.

In-

Infinitorum. Sed, unde fiat, ut ſeries illæ, ſubinde interpolatæ, propriam naturam non amittant; id nec ipſe, nec alius quiſquam, quem ſciam, docuit. Rationem ergo ejus interpolationis hic breviter aperire non gravabimur: quam eo lubentius hic afferemus, quod præbetur nobis occaſio, ut novam quandam progreſſionum arithmeticarum proprietatem oſtendamus.

894. Jam enim cunctis notum eſt, quod ſi termini unius progreſſionis geometricæ multiplicentur ordine per terminos alterius progreſſionis geometricæ, producta conſtituunt progreſſionem aliam, ſimiliter geometricam. Notumque eſt etiam, quod, ſi hæc proprietas ad progreſſiones arithmeticas ſit transferenda, termini unius progreſſionis addendi ſunt ordine cum terminis alterius. Sed jucundum erit, inquirere, qua quidem lege progrediuntur quantitates, quæ ex terminis unius progreſſionis arithmeticæ, ordine per terminos alterius multiplicatis, oriuntur.

895. Sint ergo duæ quævis progreſſiones arithmeticæ a, $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, $a-4b$, &c., c, $c-d$, $c-2d$, $c-3d$, $c-4d$, &c.; & multiplicentur termini unius progreſſionis ordine per terminos alterius, ita, ut producantur quantitates ac, $ac-bc-ad+bd$, $ac-2bc-2ad+4bd$, $ac-3bc-3ad+9bd$, $ac-4bc-4ad+16bd$, &c. Sane quantitates iſtæ exhiberent nobis progreſſionem aliam arithmeticam, ſi omnes eæ, quæ primam excipiunt, ultima parte minuerentur. Sic enim fierent ac, $ac-bc-ad$, $ac-2bc-2ad$, $ac-3bc-3ad$, &c.; adeoque eodem ſemper intervallo in infinitum progrederentur.

896.

896. Jam ultimæ partes earum quantitatum, ordine ſumptæ, ſunt *bd*, 4*bd*, 9*bd*, 16*bd*, &c.: proindeque habentur, multiplicando per *bd* quadrata numerorum naturalium 1, 4, 9, 16, &c. Unde, quia quadrata iſta oriuntur ex continua collectione numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c.; erunt arithmetice proportionales eorum differentiæ primæ: & propterea arithmetica illa progreſſio, quam eæ quantitates nequeunt exhibere, per primas earundem differentias exhibebitur.

897. Ubi ergo termini unius progreſſionis arithmeticæ ordine multiplicantur per terminos alterius, habebuntur tales quantitates, ut earum differentiæ primæ erunt arithmetice proportionales. Nec ſane aliunde evenit, ut primæ differentiæ quadratorum, quæ fiunt ex numeris naturalibus, conſtituant progreſſionem arithmeticam, quam quia quadrata illa ex terminis unius progreſſionis arithmeticæ, ordine multiplicatis per terminos alterius, oriuntur. Nam 1, 4, 9, 16, &c. idem ſunt, ac 1 . 1, 2 . 2, 3 . 3, 4 . 4, &c.

898. Sed proprietas iſta progreſſionum arithmeticarum ulterius longe progreditur. Si enim trium hujuſmodi progreſſionum termini ordine multiplicentur per ſe mutuo; orientur quantitates tales, ut earum differentiæ ſecundæ erunt arithmeticæ proportionales. Quod ſi vero ordine multiplicentur per ſe mutuo termini quatuor progreſſionum arithmeticarum; erunt arithmetice proportionales differentiæ tertiæ earum quantitatum, quæ multiplicationibus iis producuntur. Et generaliter, quotcumque fuerint progreſſiones arithmeticæ, quarum termini ordine multiplicantur per ſe invicem; erunt in

arith-

arithmetica proportione eæ ſemper quantitatum productarum differentiæ, quas deſignat multitudo progreſſionum, unitate minuta.

899. Oſtendetur id vero eadem fere ratione. Aſſumendo enim generaliter, ac indefinite tres progreſſiones arithmeticas, comperiemus, quantitates ortas ex terminis ipſarum, ordine multiplicatis per ſe mutuo, exhibere nobis ſeriem quantitatum, quarum differentiæ primæ forent arithmetice proportionales, ſi eæ, quæ primam excipiunt, ultimam partem non haberent. Unde, quia ultimæ partes earum fiunt, multiplicando eandem quantitatem per cubos numerorum naturalium; omnino neceſſe eſt, ut ſint arithmetice proportionales illarum quantitatum differentiæ ſecundæ.

900. Similiter, ſi aſſumantur generaliter, ac indefinite quatuor progreſſiones arithmeticæ, & multiplicentur termini ipſarum ordine per ſe mutuo; prodibunt quantitates tales, ut earum differentiæ ſecundæ forent arithmeticæ proportionales, ſi eæ, quæ primam excipiunt, ultima parte minuerentur. Quare, quum ultimæ partes talium quantitatum habeantur, multiplicando eandem quantitatem per quadrato-quadrata numerorum naturalium; plane opus eſt, ut ſint arithmetice proportionales illarum differentiæ tertiæ.

901. Quippe ſciendum, quod ſicuti in quadratis numerorum naturalium 1,4,9,16,25,&c. ſunt arithmetice proportionales differentiæ primæ; ſic arithmeticam progreſſionem conſtituunt in cubis 1, 8, 27,64, 125, &c. differentiæ ſecundæ; in quadrato-quadratis 1,16,81,256, 625,&c. differen-

rentiæ tertiæ; atque ita deinceps. Quam ſane proprietatem exinde etiam pendere, putandum eſt, quod, ſicuti quadrata oriuntur ex terminis duarum progreſſionum arithmeticarum, per ſe mutuo multiplicatis; ſic cubi producuntur ex multiplicatione terminorum trium hujuſmodi progreſſionum, quadrato-quadrata ex multiplicatione terminorum quatuor talium progreſſionum, ſicque in infinitum.

902. Hac progreſſionum arithmeticarum proprietate ſuppoſita, haud difficile modo erit, traditæ interpolationis rationem intelligere. Jam enim numeri naturales ſubinde* interpolantur, ut per interjectionem terminorum adhuc maneant arithmetice proportionales. Quare, ſi quilibet terminus ſeriei numerorum naturalium interpolatæ deſignetur per m; conſtituendo ſeries alias, in quibus correſpondentes termini ſint $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, &c., etiam ſeries iſtæ progreſſiones erunt arithmeticæ; proindeque, vi oſtenſæ proprietatis, plane neceſſe eſt, ut ſint arithmetice proportionales differentiæ primæ in ſerie, ubi quiſque terminus deſignatur per $m . m + 1$; differentiæ ſecundæ in ſerie, ubi deſignatur per $m . m + 1 . m + 2$; differentiæ tertiæ in ſerie, ubi deſignatur per $m . m + 1 . m + 2 . m + 3$; atque ita deinceps. *art. 888.

903. Verum quidem eſt, quod, interpolatis ſeriebus figuratorum primi generis ea, quam ſupra * tradidimus, ratione, deſignatur quiſque terminus per $(m . m + 1) : 2$ in ſerie figuratorum primi ordinis, per $(m . m + 1 . m + 2) : 6$ in ſerie figuratorum ſecundi ordinis, per $(m . m + 1 . m + 2 . m + 3) : 24$ in ſerie figurato- *art. 892.

rum tertii ordinis, atque ita de aliis. Sed id vim allatæ demonſtrationis nequaquam evertit. Jam enim notum eſt, quantitates quotcumque, per eandem ſive diviſas, ſive multiplicatas, in eadem ratione manere. Unde, ſi ſunt arithmetice proportionales differentiæ primæ earum quantitatum, quarum quælibet deſignatur per $m \cdot m + 1$; per diviſionem, aut converſionem rationis tales etiam erunt differentiæ primæ quantitatum, quæ indefinite deſignantur per $(m \cdot m + 1) : 2$.

VI. Generalis vulgarium poteſtatum formulæ extenſio demonſtrata.

904. His prælibatis, videamus modo, unde fiat, ut formula generalis poteſtatum vulgarium, ſuperius * exhibita, ad poteſtates alias ſe extendat. Qua in re ordiemur a poteſtatibus perfectis negativis, quæ ex diviſione unitatis per correſpondentes poſitivas oriuntur *. Jamque, ſi $a + b$ ſit quantitas bimembris, ex qua eæ fieri debent; comperiemus, quæſitam poteſtatem eſſe $1a^{-1} - 1a^{-2}b + 1a^{-3}b^2 - 1a^{-4}b^3 + 1a^{-5}b^4 -$ &c., quum ejus exponens eſt -1; eſſe $1a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 -$ &c., quum exponens eſt -2; eſſe $1a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 - 10a^{-6}b^3 + 15a^{-7}b^4 -$ &c., quum exponens eſt -3; eſſe $1a^{-4} - 4a^{-5}b + 10a^{-6}b^2 - 20a^{-7}b^3 + 35a^{-8}b^4 -$ &c., quum exponens eſt -4; atque ita deinceps.

*art. 831.

*art. 761.

905. Quum ergo hac lege progrediantur in infinitum poteſtates perfectæ negativæ quanti-

atis

tatis bimembris $a + b$, patet, earum terminos, perinde ac eos, ex quibus conſtant poteſtates perfectæ poſitivæ, exhibendos eſſe per a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$, &c., ubi earundem exponens generaliter, ac indefinite deſignatur per m. Sed perſpicuum eſt quoque, coefficientes ſuorum terminorum, ut alternatim affici ſignis $+$, & $-$, ſic eſſe unitates, quum exponens eſt -1; eſſe numeros naturales, quum exponens eſt -2; eſſe figuratos primi ordinis, quum exponens eſt -3; eſſe figuratos ſecundi ordinis, quum exponens eſt -4; atque ita in infinitum.

906. Hinc, ſi tabula coefficientium, quibus afficiuntur termini poteſtatum perfectarum poſitivarum, continuetur ad partem oppoſitam, ponendo primum coefficientes terminorum ejus poteſtatis, cujus exponens eſt zero, & deinde coefficientes terminorum poteſtatum perfectarum negativarum; omnino neceſſe eſt, ut in prima columna verticali reperiatur ſeries unitatum, in ſecunda ſeries numerorum naturalium utrinque continuata, in tertia ſeries figuratorum primi ordinis utrinque promota, in quarta ſeries figuratorum ſecundi ordinis utrinque protracta, atque ita deinceps. Nam, quum $(a + b)^0$ idem ſit *, ac 1; coefficientes terminorum hujus po- * art. 56;
teſtatis erunt 1, 0, 0, 0, 0, &c.

907. Id vero quum ita ſit, neceſſe eſt pariter, ut, ſicuti progreſſionem arithmeticam conſtituunt ipſi termini in ſecunda columna verticali; ita * ſint arithmetice proportionales, terminorum * art. 857.
differentiæ primæ in tertia columna verticali, ter- 850
minorum differentiæ ſecundæ in quarta, termi-

norum differentiæ tertiæ in quinta, atque ita de aliis. Unde, quemadmodum, vocando m terminum quemcumque poſitivum ſecundæ columnæ
* Art. 821. verticalis eſſe debet * $(m.m-1):(1.2)$, qui ei correſpondet in tertia; $(m.m-1.m-2):(1.2.3)$, qui ei correſpondet in quarta; $(m.m-1.m-2.m-3):(1.2.3.4)$, qui ei correſpondet in quinta; atque ita deinceps; ſic pariter, exhibente m terminum quemlibet negativum ejuſdem ſecundæ columnæ verticalis,
* Art. 887. 902. exhibere debent * eædem quantitates terminos, ei correſpondentes in aliis columnis.

908. Ex quibus modo jam liquido patet, quod, ſicuti in poteſtatibus perfectis poſitivis,
* Art. 823. vocando m exponentem, fit * unitas coefficiens primi termini, $m:1$ coefficiens ſecundi, $(m.m-1):(1.2)$ coefficiens tertii, $(m.m-1.m-2):(1.2.3)$ coefficiens quarti, atque ita de aliis; ſic quoque in poteſtatibus perfectis negativis, deſignato exponente ſimiliter per m, eædem omnino eſſe debent expreſſiones coefficientium ſuorum terminorum. Unde plane neceſſe eſt, ut eadem illa formula generalis, ſupe-
* Art. 831. rius * exhibita, pro poteſtatibus perfectis poſitivis quantitatis bimembris, obtineat quoque, relate ad poteſtates perfectas negativas ejuſdem quantitatis.

909. Non diſſimilis erit demonſtratio, pro poteſtatibus imperfectis, quæ fiunt, ſola radicum extractione, quum ſunt poſitivæ; & partim extractione radicum, partim diviſione, quum ſunt negativæ. Si enim conſtituantur hujuſmodi poteſtates, jam liquido patebit, terminos ipſarum exhibendos eſſe per $a^{m}, a^{m-1}b, a^{m-2}b^{2}, a^{m-3}b^{3}, a^{m-4}b^{4}$

$a^{m-4}b^4$, &c., ubi exponens earundem generaliter; ac indefinite vocatur m. Et, ſi porro coefficientes ſuorum terminorum inſerantur horizontaliter in eadem illa tabula, eodem plane ordine, quo inter poteſtates perfectas inſeri debent imperfectæ; patebit quoque, per eos interpolari, tam ſeries unitatum, & numerorum naturalium, quam ſeries ipſorum figuratorum.

910. Hac ratione inter poteſtates perfectas, quæ habent pro ſuis exponentibus 0, 1, 2, 3, &c., ordine inſeri poſſunt poteſtates imperfectæ, quarum exponentes ſunt 1 : 2, 3 : 2, 5 : 2, &c. Unde, inter illarum coefficientes inſertis horizontaliter coefficientibus iſtarum, qui relate ad 1 : 2 ſunt 1, 1 : 2, — 1 : 8, 1 : 16, &c., relate ad 3 : 2 ſunt 1, 3 : 2, 3 : 8, — 1 : 16, &c., & relate ad 5 : 2 ſunt 1, 5 : 2, 15 : 8, 5 : 16, &c.; comperientur in prima columna verticali termini 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c., in ſecunda termini 0, 1 : 2, 1, 3 : 2, 2, 5 : 2, 3, &c., in tertia termini 0, — 1 : 8, 0, 3 : 8, 1, 15 : 8, 3, &c., in quarta termini 0, 1 : 16, 0, — 1 : 16, 0, 5 : 16, 1, &c., atque ita deinceps.

911. Oriri vero in hunc modum interpolatas, non modo ſeries unitatum, & numerorum naturalium, verum etiam ipſas figuratorum ſeries; perſpicuum quidem eſt. Jam enim terminorum, qui reperiuntur in tertia columna verticali, primæ differentiæ ſunt — 1 : 8, 1 : 8, 3 : 8, 5 : 8, 7 : 8, 9 : 8, &c.; has vero arithmeticam progreſſionem conſtituere, nemo non videt. Quumque primæ differentiæ terminorum, qui extant in quarta columna verticali, ſint 1 : 16, — 1 : 16, — 1 : 16, 1 : 16, 5 : 16, 11 : 16, &c.;

erunt differentiæ ſecundæ eorundem termino-rum — 2 : 16, 0, 2 : 16, 4 : 16, 6 : 16, &c., quas arithmetice proportionales eſſe, patet etiam abunde.

912. Ut ergo rem contrahamus, en ejus, de quo agitur, veritas oſtenſa. Si in tabula illa inſerti concipiantur horizontaliter coefficientes terminorum poteſtatum imperfectarum, eodem plane ordine, quo ipſæ poteſtates imperfectæ inferi debent inter perfectas; habebuntur * interpolatæ, tam ſeries unitatum, & numerorum naturalium, quam ſeries ipſorum figuratorum. Quare, ſicuti in ſecunda columna verticali ipſi termini progreſſionem exhibent arithmeticam; ſic exhibebunt * progreſſionem non diſſimilem terminorum differentiæ primæ in tertia columna verticali, terminorum differentiæ ſecundæ in quarta, terminorum differentiæ tertiæ in quinta, atque ita deinceps.

* art. 909.

* art. 887.

913. Atque hinc porro, ſicuti, vocando m terminum quemcumque integrum ſecundæ columnæ verticalis, eſſe debet * $(m . m - 1) : (1 . 2)$, qui ei correſpondet in tertia; $(m . m - 1 . m - 2) : (1 . 2 . 3)$, qui ei correſpondet in quarta; $(m . m - 1 . m - 2 . m - 3) : (1 . 2 . 3 . 4)$, qui ei correſpondet in quinta; atque ita de aliis; ſic etiam, exhibente m terminum quemlibet fractum ejuſdem ſecundæ columnæ verticalis, neceſſe eſt, ut eædem quantitates exhibeant * terminos, ei correſpondentes in aliis columnis: proindeque, ſi idem numerus m referat exponentem cujuſque poteſtatis, omnino opus eſt, ut pro unaquaque poteſtate ſit 1 coefficiens primi termini, $m : 1$ coefficiens ſecundi,

* art. 821. 907.

(m.

$(m \cdot \overline{m-1}):(1 \cdot 2)$ coefficiens tertii, $(m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}):(1 \cdot 2 \cdot 3)$ coefficiens quarti, atque ita deinceps.

CAPUT IV.

Alia poteſtatum ſpecies enodata.

914. Est & alia ſpecies poteſtatum, omnino diverſa ab iis, quas ſuperius* recenſuimus. Poteſtates enim, de quibus, ſupra locuti ſumus, id commune habent, quod ſingularum exponentes ſunt numeri rationales. Sed concipere licet poteſtates alias, quarum exponentes ſint numeri radicales; vel generalius, quæ habeant pro ſuis exponentibus, aut eaſdem quantitates, ad quas eæ poteſtates referuntur. ut a^a, b^b, c^c; aut etiam quantitates alias, ab iis plane diverſas, ut a^c, b^a, c^b.

* art. 714, 715.

915. Hujuſmodi poteſtates dicuntur paſſim quantitates exponentiales; & earum ortus quantitatibus logarithmicis ferri debet acceptus. Unde, ut melius natura, ac geneſis quantitatum exponentialium intelligi poſſint; rem oportet paulo altius repetere, & quæ ſint quantitates logarithmicæ, quæve earundem affectiones, paucis prius exponere. Neque vero vitio nobis vertendum eſt, quod de hujuſmodi quantitatibus in Algebræ Elementis diſſerimus. Nam earum doctrina ad generalem poteſtatum theoriam pertinere videtur.

I. Natura, & proprietates quantitatum logarithmicarum.

916. Quantitates logarithmicæ dicuntur eæ, quæ conſtituentes progreſſionem arithmeticam, aliis correſpondent, geometricam progreſſionem componentibus. Ita, ſi quantitates *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. conſtituant progreſſionem arithmeticam, eæque ordine adſcribantur quantitatibus aliis *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, &c. quæ componant progreſſionem geometricam; illæ relate ad iſtas quantitates dicentur logarithmicæ: nimirum *a* relate ad *f*, *b* relate ad *g*, *c* relate ad *h*, atque ita deinceps.

917. Hinc quantitates logarithmicæ non ſunt quantitates abſolutæ, ſed relativæ; nec ſane intelligi poſſunt, niſi præſentes habeantur aliæ illæ quantitates, ad quas ipſæ ut tales referuntur. Unde, ſicuti vocari quoque ſolent ſimpliciter logarithmi, ſic in iis enunciandis adjiciuntur ſemper quantitates aliæ, quibus ipſæ velut logarithmi correſpondent. Ut in allato exemplo *a* dicitur logarithmus quantitatis *f*, *b* logarithmus quantitatis *g*, *c* logarithmus quantitatis *h*, atque ita de aliis.

918. Progreſſio porro arithmetica, quæ ſit ſedes, ſeu locus logarithmorum, ſumi poteſt ad libitum. Unde, ſicuti infinitæ eſſe queunt hujuſmodi progreſſiones; ſic & earundem quantitatum infinitæ dari poterunt logarithmorum ſpecies. Interim, ea progreſſione ſemel ſtatuta, non licebit amplius eandem variare. Et, quemadmodum ad aſſumptam progreſſionem geometricam

cam advocandæ ſunt quantitates omnes, quarum quæruntur logarithmi, ita in eadem illa progreſſione arithmetica, quæ ſemel poſita eſt, quærendi ſunt logarithmi, quos oportet invenire.

919. Fieri autem poteſt, ut aſſumpta progreſſio geometrica, utrinque continuata, non includat eas quantitates, de quarum logarithmis eſt quæſtio. Unde pari ratione nec etiam progreſſio arithmetica, utrinque promota, quæſitos logarithmos exhibebit. Id vero quum accidit, ad interpolationes confugere opus eſt. Nimirum in progreſſione geometrica tot alii termini inter binos quoſque erunt interjiciendi, quot neceſſarii judicabuntur, ut quantitates, de quibus agitur, in ea reperiantur. Et, interpoſitis aliis totidem inter binos quoſque progreſſionis arithmeticæ, habebuntur logarithmi earum quantitatum.

920. Et ſane vulgatis canon logarithmicus, qui numerorum omnium naturalium logarithmos exhibet, hoc fere artificio compoſitus eſt. Primo enim aſſumpta eſt progreſſio geometrica 1, 10, 100, 1000, &c., quæ ab unitate pergit in ratione decupla; eique adſcripta progreſſio arithmetica 0, 1, 2, 3, &c., in qua quiſque terminus pluribus cyphris intelligi debet adauctus. Deinde utraque progreſſio, per interjectionem aliorum terminorum, ſubinde eſt interpolata, ut in priore caderent omnes alii numeri naturales, vel etiam numeri tales, quibus ii quamproxime accederent; in ſecunda vero correſpondentes eorundem logarithmi haberentur.

921. Sed, ut ad quantitates logarithmicas, generatim conſideratas, revertamur; jam vidimus

*Art.917. mus ſupra * ; eas non eſſe quantitates abſolutas, ſed relativas ; nec ſatis intelligi poſſe ; niſi ſimul obverſentur noſtro animo aliæ illæ quantitates, quibus ipſæ velut logarithmi correſpondent. Id vero quum ita ſit ; liquet ; eaſdem quantitates non melius deſignari poſſe ; quam præfigendo litteram *l* quantitatibus ipſis ; ad quas eæ referuntur. Qua ratione deſignabimus eam per *l.a*, ſi referatur ad *a* ; per *l.ax* ; ſi referatur ad *ax* ; per *l* (*ax* + *bx*) ; ſi referatur ad *ax* + *bx* ; atque ita de aliis.

922. Hæc autem quantitates logarithmicas deſignandi ratio commendanda eſt, non modo, quia ſiſtit nobis ipſas illas quantitates, quibus correſpondent, ſed alio etiam ex capite. Jam

*Art.918. enim notavimus ſupra * ; progreſſionem arithmeticam, quæ ſedes ſit quantitatum logarithmicarum ; ad libitum accipi poſſe ; & inde fieri, ut earundem quantitatum infinitæ eſſe queant logarithmorum ſpecies. Itaque optandum eſſet, ut ſub una eademque expreſſione omnes continerentur. Plane vero, quum deſignantur logarithmi, præfigendo litteram *l* quantitatibus, ad quas referuntur, id obtinetur. Nam littera *l* exhibet eos quidem, ſed nullum iis largitur valorem certum, ac definitum.

923. Cæterum ; quos hic vocamus quanti-

*Art.737. tatum logarithmos ; alibi * exponentes quantitatum appellavimus. Unde ; quum nullum ſit diſcrimen inter exponentes, & logarithmos, quæcumque de exponentibus ſuperius oſtenſa ſunt, ea omnia ad logarithmos pariter pertinebunt. Quocirca, ſi fuerint quatuor quantitates

*Art.737. geometrice proportionales, erit * ſumma ex lo-

logarithmis extremarum æqualis ſummæ ex logarithmis mediarum. Quod ſi vero tres fuerint quantitates in geometrica proportione, erit * ſumma ex logarithmis extremarum æqualis duplo logarithmi quantitatis intermediæ. *art.739.

924. Præterea, ſi pro logarithmo unitatis capiatur zero, hæc etiam de logarithmis ſtatui debent. Primo, ut ſumma logarithmorum, multiplicandi, & multiplicatoris adæquet * logarithmum producti. Secundo, ut logarithmus diviſoris, ſubductus a logarithmo dividendi, relinquat * logarithmum quotientis. Tertio, ut duplum logharithmi lateris adæquet * logarithmum quadrati, triplum logarithmum cubi, quadruplum logarithmum quadrato-quadrati, atque ita deinceps. Et quarto demum, ut ſemiſſis logarithmi alicujus quantitatis adæquet * logarithmum ſuæ quadratæ radicis, triens logarithmum ſuæ radicis cubicæ, quadrans logarithmum ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita in infinitum. *art.742. *art.744. *art.746. *art.750.

925. Hinc, etſi logarithmus cujuſque quantitatis deſignari * queat, præfigendo quantitati litteram l; attamen hæc ejus expreſſio, ope proprietatum, quæ logarithmis competunt, poterit in aliam tranſmutari, adhibita adhuc littera l. Ut, ſi quantitas ſit $ab:c$; logarithmus ejus deſignari poterit, non modo per $l.(ab:c)$, verum etiam per $l.a + l.b - l.c$. Nam, quum ſint geometrice proportionales quatuor quantitates c, a, b, $ab:c$; erit * ſumma ex logarithmis extremarum $l.(ab:c) + l.c$ æqualis ſummæ ex logarithmis mediarum $l.a + l.b$; adeoque, dempto utrinque $l.c$, fiet $l.(ab:c)$ æqualis *art.921. *art.923.

$l.a$

$l.a + l.b - l.c$. Et pari ratione, ſi quantitas ſit $a^2 : c$, quæ eſt tertia geometrice proportionalis poſt duas c, & a; licebit ; logarithmum ejus exprimere, non modo per $l.(a^2 : c)$, verum etiam per $2l.a - l.c$.

II. *Transformationes expreſſionum logarithmicarum ad ſuas regulas revocatæ.*

926. TRansformationes expreſſionum logarithmicarum, quarum modo * meminimus, ſunt magno uſui in reſolutione eorum problematum, quæ pendent ex logarithmis. Unde non abs re fore putamus, nonnihil copioſius de iis diſſerere, & ad regulas quaſdam generales eaſdem revocare. Diſtinguemus autem tres caſus. Primo, quum quantitas, ad quam refertur logarithmus, oritur ex multiplicatione, vel aliarum plurium, vel unius per ſe ipſam ſæpius facta. Secundo, quum eadem quantitas eſt fractio, hoc eſt quotiens, ortus ex diviſione aliarum quantitatum. Et tertio demum, quum eſt quantitas radicalis, hoc eſt radix, extrahenda ex alia data quantitate.

* art. 925.

927. Quantum ergo ad priorem caſum, ſit primum quantitas duarum dimenſionum ab. Dico, logarithmum ejus deſignari poſſe, non modo per $l.ab$, verum etiam per $l.a + l.b - l.1$. Eſt enim enim ab productum, quod oritur, multiplicando a per b. Quare, ex definitione multiplicationis, erunt geometrice proportionales quatuor quantitates $1, a, b, ab$. Unde ſumma ex logarithmis extremarum $l.ab + l.1$ æqualis erit * ſummæ ex logarithmis mediarum $l.a$

* art. 923.

$+ l.$

$+ l.b$: & propterea, dempto utrinque logarithmo unitatis, hoc eſt $l.1$; fiet $l.ab$ æqualis $l.a + l.b - l.1$.

928. Sit ſecundo quantitas trium dimenſionum abc. Dico, logarithmum ejus exprimi poſſe, tam per $l.abc$, quam per $l.a + l.b + l.c - 2l.1$. Si enim loco bc ponatur d, fiet abc æqualis ipſi ad. Unde $l.abc$, & $l.ad$ æquales erunt inter ſe. Jam $l.ad$ idem eſt *, ac $l.a + l.d - l.1$. Quare ſimiliter $l.abc$ æqualis erit $l.a + l.d - l.1$. Quum autem d, & bc inter ſe ſint æquales, erit $l.d$ æqualis $l.bc$, ſive etiam $l.b + l.c - l.1$. Unde, ſubſtitutione peracta, fiet $l.abc$ æqualis $l.a + l.b + l.c - l.1 - l.1$, ſive $l.a + l.b + l.c - 2l.1$. *art. 927.

929. Eodem prorſus argumento oſtendemus, quod, ſi habeatur quantitas quatuor dimenſionum $abcd$, logarithmus ejus deſignari poteſt, non modo per $l.abcd$, verum etiam per $l.a + l.b + l.c + l.d - 3l.1$. Et generaliter, quotcumque fuerint dimenſiones quantitatis, logarithmus ejus comperietur ſemper æqualis ſummæ ex logarithmis quantitatum omnium, per quas ejus dimenſiones conſtituuntur, minutæ logarithmo unitatis, toties ſumpto, quot ſunt quantitatis dimenſiones, una dempta.

930. Id vero quum ita ſit, liquet, logarithmum ipſius a^2 deſignari poſſe, tam per $l.a^2$, quam per $2l.a - l.1$. Quum enim a^2 ſit quantitas duarum dimenſionum, quarum quælibet conſtituitur per a; erit * $l.a^2$ æqualis $l.a + l.a - l.1$. Unde, quia $l.a + l.a$ idem ſunt, ac $2l.a$; erit $l.a^2$ æqualis $2l.a - l.1$. Sed eodem argumento patebit, logarithmum ipſius a^3 de- *art. 928.

deſignari poſſe, non modo per $l.a^3$, verum etiam per $3l.a - 2l.1$; pariterque logarithmum ipſius a^4 poſſe exprimi, tam per $l.a^4$, quam per $4l.a - 3l.1$; atque ita deinceps; adeo, ut generaliter, ſi a^m referat quamcumque poteſtatem perfectam poſitivam ipſius a, erit $l.a^m$ æqualis $ml.a - ml.1 + l.1$.

931. Quantum ad ſecundum caſum, quum quantitas, ad quam refertur logarithmus eſt, fractio; ſit x numerator fractionis, & y ejus denominator. Dico, fractionis hujus $x:y$ logarithmum exprimi poſſe, non modo per $l.(x:y)$, verum etiam per $l.x + l.1 - l.y$. Quum enim fractio $x:y$ ſit quotiens, qui oritur, dividendo x per y; erunt, ex natura diviſionis, geometrice proportionales quatuor quantitates y, x, 1, $x:y$. Quare ſumma ex logarithmis extremarum $l.(x:y) + l.y$ æqualis erit * ſummæ ex logarithmis mediarum $l.x + l.1$: proindeque, ſubducto utrinque $l.y$, fiet $l.(x:y)$ æqualis $l.x + l.1 - l.y$.

* Art. 923.

932. Jam fractio $x:y$ omnes omnino fractiones poteſt nobis exhibere. Unde generaliter ſtatui poteſt, logarithmum cujuſque fractionis æqualem eſſe logarithmo numeratoris, aucto logarithmo unitatis, & diminuto logarithmo denominatoris. Quia autem fieri poteſt, ut tam numerator, quam denominator ſit quantitas plurium dimenſionum; licebit, utriuſque logarithmum exprimere quoque * per logarithmos quantitatum, per quas dimenſiones conſtituuntur. Qua ratione ipſe fractionis logarithmus per logarithmos earundem quantitatum exprimi poterit.

* Art. 929.

933. Ut, ſi fractio ſit $a^3 : bc$, logarithmus

ejus

ejus $l.(a^3 : bc)$ æqualis erit * $l.a^3 + l.1 -$ *art.932.
$l.bc$. Sed quoniam $l.a^3$ eſt idem *, ac $3l.a -$ *art.930.
$2l.1$, & $l.bc$ perinde valet *, ac $l.b + l.c$ *art.927.
$- l.1$; erit $l.(a^3 : bc)$ æqualis $3l.a - 2l.1$
$+ l.1 - l.b - l.c + l.1$, ſive etiam $3l.a - l.b$
$- l.c$. Atque ita quoque, ſi fractio ſit $a^5 : c^2$,
erit $l.(a^5 : c^2)$ æqualis * $l.a^5 + l.1 - l.c^2$. Eſt *art.932.
autem * $l.a^5$ idem, ac $5l.a - 4l.1$; eſtque etiam *art.930.
$l.c^2$ idem, ac $2l.c - l.1$. Quare erit $l.(a^5 :$
$c^2)$ æqualis $5l.a - 4l.1 + l.1 - 2l.c +$
$l.1$, hoc eſt $5l.a - 2l.1 - 2l.c$.

934. Quod ſi ſedulo perpendatur regula, ſuperius * tradita, pro quantitatibus plurium dimen- *art.929.
ſionum, patebit, logarithmum cujuſque fractionis oriri, ſi ex logarithmis quantitatum, numeratoris dimenſiones conſtituentium, ſubducantur logarithmi quantitatum, quæ conſtituunt dimenſiones denominatoris, & reſiduo addatur logarithmus unitatis, toties ſumptus, quot deſignat multitudo dimenſionum denominatoris, aucta unitate una, & diminuta multitudine dimenſionum numeratoris. Ut fractionis $a^5 : c^2$ logarithmus erit $5l.a - 2l.c + (2 + 1 - 5)\, l.1$,
hoc eſt $5l.a - 2l.c - 2l.1$, prorſus, ut ſupra *. *art.933.

935. Supereſt tertius caſus, quum logarithmus refertur ad quantitatem aliquam radicalem. Sit ergo primum $\sqrt{a}$ quantitas radicalis, cujus quæritur logarithmus. Dico, logarithmum ejus exprimi poſſe, non modo per $l.\sqrt{a}$, verum etiam per $(l.a + l.1) : 2$. Ponatur enim $\sqrt{a}$ æqualis x. Et, utraque quantitate ad quadratum elevata, fiet a æqualis x^2; & $l.a$ æqualis $l.x^2$. Eſt
autem $l.x^2$ idem *, ac $2l.x - l.1$. Quare *art.930.
erit quoque $l.a$ æqualis $2l.x - l.1$; & addi-

to

to utrinque $l.1$, erit $l.a+l.1$ æqualis $2l.x$. Unde fiet demum $l.x$, ſive $l.\sqrt{a}$ æqualis $(l.a+l.1):2$.

936. Sit ſecundo $\sqrt[3]{a}$ quantitas radicalis, cujus logarithmus quæritur. Dico, logarithmum ejus deſignari poſſe, tam per $l.\sqrt[3]{a}$, quam per $(l.a+2l.1):3$. Ponatur enim hic quoque $\sqrt[3]{a}$ æqualis x. Et, utraque quantitate ad cubum elevata, fiet a æqualis x^3; & $l.a$ æqua-
* Art. 930. lis $l.x^3$. Eſt autem $l.x^3$ idem *, ac $3l.x -$
$2l.1$. Quare erit pariter $l.a$ æqualis $3l.x - 2l.1$; & addito utrinque $2l.1$, erit $l.a+2l.1$ æqualis $3l.x$. Unde fiet demum $l.x$, ſive $l.\sqrt[3]{a}$ æqualis $(l.a+2l.1):3$.

937. Sed, ut rem ſub generali exemplo generaliter comprehendamus, eſto n exponens ſigni radicalis; & a quantitas, unde talis radix eſt extrahenda. Dico, logarithmum ipſius $\sqrt[n]{a}$ exhiberi poſſe, tam per $l.\sqrt[n]{a}$, quam per $(l.a+nl.1-l.1):n$. Ponatur namque $\sqrt[n]{a}$ æqualis x. Et, elevata utraque quantitate ad eam poteſtatem, cujus exponens ſit n, fiet a æqualis x^n; & $l.a$ æqualis
* Art. 930. $l.x^n$. Jam vero $l.x^n$ idem eſt *, ac $nl.x - nl.1$
$+ l.1$. Itaque erit quoque $l.a$ æqualis $nl.x - nl.1 + l.1$; & addito utrinque $nl.1 - l.1$ erit $l.a + nl.1 - l.1$ æqualis $nl.x$. Quare fiet demum $l.x$, ſive $l.\sqrt[n]{a}$ æqualis $(l.a + nl.1 - l.1):n$.

938. Id vero quum ita ſit, facile erit, oſtendere, quod, conſiderando quantitates radicales, velut poteſtates imperfectas, obtinet relate ad eas eadem omnino regula, quæ locum habet in poteſtatibus perfectis. Si enim a^m referat quamcumque poteſtatem perfectam ipſius a; jam vidi-
* Art. 930. mus ſupra *, logarithmum ejus $l.a^m$ æqualem
eſſe

eſſe $ml.a - ml.1 + l.1$. Itaque, quum $\sqrt[n]{a}$ idem ſit *, ac $a^{1:n}$; eo res redit, ut videamus, *art.777.
num ſubſtituta fractione $1:n$ loco m, oriatur expreſſio logarithmica ipſius $\sqrt[n]{a}$. Quod quidem liquet abunde. Nam, illiuſmodi ſubſtitutione peracta, emergit $(l.a):n - (l.1):n + l.1$, quæ reducitur ad $(l.a + nl.1 - l.1):n$.

III. Reductio omnium regularum præcedentium ad unam ſolam.

939. Vidimus paulo ante *, regulam, *art.938.
ſuperius * traditam, pro tranſ- *art.930.
formandis expreſſionibus logarithmicis poteſtatum perfectarum, obtinere etiam, relate ad poteſtates imperfectas, quarum ope tolluntur ſigna radicalia. Sed in utroque caſu ſermo erat de poteſtatibus poſitivis, hoc eſt de iis, quæ numeros poſitivos pro ſuis exponentibus habent. Unde, quia tam perfectæ, quam imperfectæ poteſtates poſſunt eſſe pariter negativæ; optandum eſſet, ut eadem regula etiam in aliis hiſce poteſtatibus locum haberet. Nam hac ratione liceret, uno eodemque canone cujuſcumque quantitatis expreſſionem logarithmicam transformare.

940. Et ſane, rem ita ſe habere, haud arduum erit oſtendere. Si enim a^m referat quamcumque poteſtatem perfectam poſitivam ipſius a; erit * $l.a^m$ æqualis $ml.a - ml.1 + l.1$. *art.930.
Plane vero, ſi in hac expreſſione loco m ponatur numerus quilibet integer negativus $-n$; mutabitur ea in hanc aliam $-nl.a + nl.1 + l.1$.
Unde pro poteſtatibus perfectis negativis eo res redit, ut oſtendamus, logarithmum ipſius a^{-n} eſ-

ſe $-nl.a+nl.1+l.1$. Quod quidem li-
*art.761. quido patet. Nam, quum a^{-n} idem ſit * ac $1:$
*art.932. a^{n}; erit * $l.a^{-n}$ æqualis $l.1+l.1-l.a^{n}$,
*art.939. Eſt autem * $l.a^{n}$ idem, ac $nl.a-nl.1+l.1$.
Quare erit $l.a^{-n}$ æqualis $l.1+l.1-nl.a+nl.1-l.1$, hoc eſt $-nl.a+nl.1+l.1$.

941. Similiter, ſi in expreſſione logarithmica $ml.a-ml.1+l.1$ ejuſdem poteſtatis perfectæ poſitivæ a^{m} loco m ſcribatur quælibet fractio negativa $-1:n$; vertetur ea in hanc aliam $-(l.a):n+(l.1):n+l.1$, ſive etiam $(-l.a+l.1+nl.1):n$. Quare pro poteſtatibus imperfectis negativis eo res redit, ut oſtendamus, logarithmum ipſius $a^{-1:n}$ eſſe $(-l.a+l.1+nl.1):n$. Quod quidem abunde li-
*art.775. quet. Nam, quum $a^{-1:n}$ idem ſit *, ac $1:\sqrt[n]{a}$;
*art.932. erit * $l.a^{-1:n}$ æqualis $l.1+l.1-l.\sqrt[n]{a}$.
*art.937. Eſt autem $l.\sqrt[n]{a}$ * idem, ac $(l.a+nl.1-l.1):n$. Itaque erit $l.a^{-1:n}$ æqualis $l.1+l.1-(l.a-nl.1+l.1):n$, hoc eſt $(-l.a+l.1+nl.1):n$.

*art.930. 942. Regula ergo, ſuperius * tradita, pro transformandis expreſſionibus logarithmicis earum poteſtatum, quæ ſunt perfectæ poſitivæ, obtinet, tam relate ad poteſtates imperfectas poſitivas, quam relate ad poteſtates negativas, tum perfectas, cum imperfectas. Unde, ſi ope pote-
*art.776. ſtatum imperfectarum tollantur * ſigna radicalia, & mediantibus poteſtatibus negativis quantita-
*art.762. tes fractæ revocentur * ad integras; licebit, una eademque regula cujuſcumque quantitatis expreſſionem logarithmicam transformare.

943. Regula autem ita ſe habet. Capiantur logarithmi quantitatum componentium, quibus

ve-

velut coefficientes præfigantur ipſi earum quantitatum exponentes, ſuis propriis ſignis affecti. Deinde ex ſumma eorundem logarithmorum ſubducatur logarithmus unitatis, toties ſumptus, quot ſunt quantitatis dimenſiones, una dempta. Et reſiduum erit expreſſio logarithmica quæſita. Ubi tamen notandum, quod numerus dimenſionum propoſitæ quantitatis capi debet, colligendo ſimul exponentes, ſuis propriis ſignis. Nam eæ quantitates componentes, quæ exponentes habent negativos, non augent, ſed minuunt numerum dimenſionum.

944. Oporteat itaq; primum, exprimere logarithmum hujus quantitatis $a^3b^4 : c^2d$. Sane, quum quantitas iſta ſit fractio, revocabitur ad quantitatem integram, ſcribendo $a^3b^4c^{-2}d^{-1}$. Quare ſumma ex logarithmis quantitatum componentium, quibus ipſi earum quantitatum exponentes, ſignis ſuis propriis, ſint adſcripti, erit $3l.a + 4l.b - 2l.c - 1l.d$. Et quoniam numerus ſuarum dimenſionum eſt $3 + 4 - 2 - 1$, ſive etiam 4; idem, unitate minutus, erit 3. Unde logarithmus unitatis, ex ſumma illa ſubducendus, ter ſumi debet: proindeque erit $3l.a + 4l.b - 2l.c - 1l.d - 3l.1$, logarithmus propoſitæ quantitatis.

945. Oporteat etiam, deſignare logarithmum alterius hujus quantitatis $a^3\sqrt{^3b^2c} : f\sqrt{df}$. Plane, ſublatis ex ea ſignis radicalibus, eademque, velut fractione, ad integram quantitatem revocata, habebitur loco ejus hæc alia $a^3b^{2:3}c^{1:3}f^{-3:2}d^{-1:2}$. Itaque ſumma ex logarithmis quantitatum componentium, quibus, ſignis ſuis propriis, præfixi ſint earum quantitatum exponentes, erit $3l.a +$

$2(l.b):3 + 1(l.c):3 - 3(l.f):2 - 1(l.d):2$, Et quoniam numerus ſuarum dimenſionum eſt $3 + 2:3 + 1:3 - 3:2 - 1:2$, ſive etiam 2; idem, unitate minutus, erit 1. Quare logarithmus unitatis, ex ſumma illa ſubducendus, ſemel tantum ſumi debet: & propterea fiet propoſitæ quantitatis logarithmus $3l.a + 2(l.b):3 + 1(l.c):3 - 3(l.f):2 - 1(l.d):2 - 1(l.1)$.

946. Oporteat demum, logarithmum exhibere quantitatis hujus $a^2\sqrt{ab}:c^3$. Sane, ſi ea radicali ſigno primum liberetur, tum deinde, velut fractio, ad integram quantitatem reducatur; eadem vertetur in hanc aliam $a^{5:2}b^{1:2}c^{-3}$. Unde, ſi capiantur logarithmi quantitatum componentium, iiſque, ſuis propriis ſignis, earundem quantitatum exponentes præfigantur; fiet ſumma eorum logarithmorum $5(l.a):2 + 1(l.b):2 - 2l.c$. Quia vero numerus ſuarum dimenſionum eſt $5:2 + 1:2 - 3$, ſive etiam 1; idem, unitate minutus, omnino evaneſcet. Quare logarithmus unitatis, ex ſumma illa ſubducendus, nullies ſumi debet: proindeque eadem illa ſumma $5(l.a):2 + 1(l.b):2 - 2l.c$ erit logarithmus propoſitæ quantitatis.

947. Cæterum, ſi logarithmus unitatis ſtatuatur zero; idem, quot libuerit ſumptus, ſemper zero comperietur. Unde exhibebitur in hac hypotheſi logarithmus cujuſvis quantitatis, quæ ſit expers ſignorum radicalium, & ad formam quantitatis integræ ſit revocata, longe facilius: nimirum, capiendo ſimpliciter ſummam ex logarithmis quantitatum componentium, quibus ſuis propris ſignis ipſi earundem quantitates expo-

ponentes ſint adſcripti. Qua ratione erit $3l.a - 2l.c$ logarithmus quantitatis a^3c^{-2}; & $5l.a - 5(l.b):2 - 1(l.c):2$ logarithmus alterius hujus quantitatis $a^5b^{-5:2}c^{-1:2}$.

IV. *Logarithmorum ſedes geometrica, ubi de curva logarithmica.*

948. Diximus ſupra *, quod ſicuti in eadem progreſſione geometrica includi debent omnes quantitates, quarum quæruntur logarithmi; ſic eadem progreſſio arithmetica ſedes ſit oportet omnium quæſitorum logarithmorum. Jam, ut in priore progreſſione quælibet quantitas aſſignabilis comperiatur, plane neceſſe eſt, ita eam interpolare, ut ratio, qua termini ejus in infinitum progrediuntur, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia. Unde etiam in ſecunda progreſſione omnino opus eſt, ut intervallum, quo in infinitum abeunt termini ipſius, minus fiat quocumque intervallo aſſignabili.

* *art.* 918.

949. Id vero quum ita ſit, licebit, ex terminis utriuſque progreſſionis figuram quandam geometricam componere, vel ſaltem compoſitam intelligere, & ad eam confugere, quum vel, data quantitate, inveniendus eſt ejus logarithmus; vel viciſſim, dato logarithmo, reperiri debet quantitas, cui ille correſpondet. Jam enim triangulum ſedes eſt duarum progreſſionum arithmeticarum, quarum termini progrediuntur in infinitum intervallo, minore quovis dato. Ad eundem itaque modum concipi poterit figura talis, ubi maneat quidem una

earum progreſſionum, quæ cernuntur in triangulo; ſed altera ſit progreſſio geometrica, in qua ratio, qua abeunt in infinitum termini ejus, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia.

950. Ut res clarius intelligatur, eſto triangulum rectangulum ABC. Jamque, ſi in latere ejus AB capiantur portiones quælibet *Aa*, *Ab*, *Ac*, *Ad*, &c., & ex punctis *a*, *b*, *c*, *d*, &c. erigantur perpendiculares *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c.; fient ipſis A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c. proportionales rectæ iſtæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. Unde, ſi portiones A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c. conſtituant progreſſionem arithmeticam; etiam rectæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. progreſſionem aliam arithmeticam component. Et, ſi porro eædem illæ portiones concipiantur numero infinitæ, & differentes a ſe mutuo minus, quam pro quavis aſſignabili differentia; adhuc rectæ *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. multitudine evadent infinitæ, & abibunt in infinitum intervallo, quovis dato minore.

FIG. 7.

951. Eſt ergo triangulum rectangulum ABC ſedes duarum progreſſionum arithmeticarum, in quarum utraque termini promoventur in infinitum per differentiam, quavis data minorem. Subſiſtat modo in portionibus A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, &c. eadem progreſſio arithmetica; ſed rectæ, iis perpendiculariter inſiſtentes *aa*, *bb*, *cc*, *dd*, &c. conſtituant progreſſionem geometricam, in qua ratio, qua abeunt in infinitum termini ejus, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia. In hoc caſu, loco trianguli, alia habebitur figura, curva quadam linea terminata. Et ex ipſa ejus conſtitutione per-

FIG. 9.

perſpicuum eſt, eandem eſſe veluti ſedem geometricam omnium quæſitorum logarithmorum.

952. Hæc autem figura multiplici quidem ratione differt a triangulo. Primo enim ea, ut jam dictum eſt, non recta, ſed curva quadam linea terminatur. Deinde, quia progreſſio geometrica, tam aſcendendo, quam deſcendendo, promovetur in infinitum * per terminos poſitivos; eadem figura, etiamſi utrinque continuetur, jacebit ſemper ad eandem partem reſpectu ipſius AB. Denique, quia ejuſdem progreſſionis geometricæ nequit * ullus terminus omnino evaneſcere; nec etiam curva, per quam figura illa terminatur, poterit rectæ AB alicubi unquam occurrere: licet ea ex parte, verſus quam progreſſio geometrica decreſcit, continuo ad eam accedat. *art.735. *art.735.

953. Curva porro, terminans figuram iſtam, FIG. 10. communiter a Geometris vocatur logarithmica. Et inter alias ejus proprietates hæc quidem eſt præcipua, quod, ſi ad aliquod ipſius punctum M ducatur tangens MT, conveniens cum AB in T, & exinde demittatur etiam ſuper AB perpendicularis MN; intercepta portio NT, quæ ſubtangens dicitur, eſt ejuſdem ubique longitudinis: adeo nempe, ut ſi recta PR tangat eandem curvam in alio quovis puncto P, & ex puncto iſto demittatur ſimiliter ſuper AB perpendicularis PQ; æquales eſſe debeant inter ſe ſubtangentes duæ NT, QR.

954. Neque vero difficile id erit oſtendere. Sint enim A*n*, A*q* termini, qui in progreſſione arithmetica proxime excipiunt ipſos AN, AQ; ſintque etiam *mn*, *pq* termini, qui in progreſſio-

ne geometrica poſt ipſos MN, PQ ſtatim ſubſequuntur. Ut ergo N*n*, Q*q* ſunt naſcentia incrementa ipſarum AN, AQ; ſic erunt M*m*, P*p* incrementa naſcentia arcuum DM, DQ. Unde, per
*art. 448. ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, poterunt M*m*, P*p* conſiderari, velut exiguæ rectæ, coincidentes cum ipſis tangentibus MT, PR; adeoque, ductis rectis MO, PS, ipſi AB parallelis, erit, ut NT ad MO, ita MN ad O*m*; & ut QR ad PS, ita PQ ad S*p*.

955. Et quoniam ex hypotheſi *mn*, *pq* ſunt termini, qui in progreſſione geometrica poſt ipſos MN, PQ ſtatim ſubſequuntur; erit, ut MN ad *mn*, ita PQ ad *pq*: proindeque, ſubducendo antecedentes ex conſequentibus, erit etiam, ut MN ad O*m*, ita PQ ad S*p*. Eſt autem MN ad O*m*, ut NT ad MO, ſive N*n*; eſtque etiam PQ ad S*p*, ut QR ad PS, ſive Q*q*. Quare erit quoque, ut NT ad N*n*, ita QR ad Q*q*. Jam vero exiguæ rectæ N*n*, Q*q* inter ſe ſunt æquales; quum ex hypotheſi A*n*, A*q* ſint termini, qui in progreſſione arithmetica proxime excipiunt ipſos AN, AQ. Itaque etiam ſubtangentes duæ NT, QR æquales erunt inter ſe.

956. Eleganter autem contrahi poteſt demonſtratio in hunc modum. Ratio, quam habet MN ad *mn*, eſt illa eadem, qua progrediuntur in infinitum termini progreſſionis geometricæ. Quare erit ubique eadem; & conſequenter eadem pariter erit ubique ratio, quam habet MN ad O*m*. Eſt igitur MN : O*m* quantitas invariabilis. Sed hujuſmodi eſt etiam N*n*, ſive MO; quum ſit intervallum, quo abeunt in infinitum termini progreſſionis arithmeticæ. Itaque

fa-

factum MN . MO : O*m* erit pariter quantitas invariabilis ; adeoque , quum factum iſtud ſit valor ſubtangentis NT , etiam ſubtangens NT invariatæ longitudinis erit.

957. Sed oſtendamus modo , quomodo, ope hujus figuræ, data qualibet quantitate, exhiberi poſſit ejus logarithmus ; & viciſſim , dato logarithmo , invenienda ſit quantitas , cui ille correſpondet . Hunc in finem definienda eſt primum in ea perpendicularis, quæ velut unitas debet haberi . Et quoniam ſubtangens curvæ logarithmicæ eſt * ejuſdem ubique longitudinis ; *art. 955. æquum eſt , velut unitatem habere eam perpendicularem, quæ ſubtangentem adæquat . Quumque ad calculi facilitatem * non parum conducat , ut zero ſit logarithmus unitatis ; *art. 947. efficiendum eſt quoque , ut punctum , in quod cadit perpendicularis illa , ſit commune principium terminorum progreſſionis arithmeticæ.

958. Hinc punctum A in ea, quam habet, poſitione erit quidem commune principium terminorum progreſſionis arithmeticæ, ſi perpendicularis AD adæquet ſubtangentem NT: aliter enim eo uſque promoveri , aut retrahi debet , donec AD ipſi NT æqualis evadat . Hac autem æqualitate ſuppoſita , & aſſumpta AD velut unitate; jam zero erit logarithmus ipſius unitatis . Unde, ſi alterius cujuſvis quantitatis logarithmus eſſet exhibendus , abſcindatur ex AD producta, ſi opus , portio AE , quæ ſit ad AD, ut eſt propoſita quantitas ad unitatem ; & ducta per punctum E recta EM , ipſi AB parallela , quæ logarithmicæ occurrat in M , fiet EM logarithmus quæſitus . Nam , demiſſa ſuper AB perpendicu-

culari MN, æquales erunt inter ſe, tam duæ AE, MN, quam duæ EM, AN.

959. Jam termini progreſſionis arithmeticæ, ut ſunt poſitivi, quum ex A tendunt verſus B; ita per contrarium evadunt negativi, quum viciſſim ex A tendunt ad plagam oppoſitam. Unde ſimiliter logarithmus inventus EM erit poſitivus, ſi AE major fuerit, quam AD; erit vero negativus, ſi per contrarium fuerit minor. Et, ob eandem rationem, quum, dato logarithmo, oportet invenire quantitatem, cui ille correſpondet, ſemper quidem datus logarithmus capi debet ſuper AB, ut perpendicularis, ei correſpondens, referat quantitatem quæſitam; verum logarithmus ille capiendus eſt ex A verſus B, quum afficitur ſigno +; & viciſſim ex A ad partem contrariam, quum ſigno — affectus reperitur.

V. Geneſis, & natura quantitatum, quæ dicuntur exponentiales.

960. NAtura, ac proprietatibus quantitatum logarithmicarum expoſitis, haud arduum modo erit intelligere, quomodo ex iis trahant originem ſuam quantitates exponentiales, & quæ ſit natura, ac indoles ipſarum. Ordiemur autem ab illis, quarum exponentes ſunt numeri radicales. Jamque vidimus, quod, exiſtente zero logarithmo unitatis, & referente $l.a$ logarithmum ipſius a, eſſe debet $2l.a$ logarithmus ipſius a^2, $-3l.a$ logarithmus ipſius a^{-3}, $2(l.a):3$ logarithmus ipſius $a^{2:3}$, & $-3(l.a):4$ logarithmus ipſius $a^{-3:4}$. Quare viciſſim,

ſi a

ſi a ſit quantitas, cui correſpondet $l.a$; erunt a^2, a^{-3}, $a^{2:3}$, $a^{-3:4}$ quantitates, ad quas referuntur $2l.a$, $-3l.a$, $2(l.a):3$, $-3(l.a):4$.

961. Generaliter ergo ſtatui poteſt, quod ſi a ſit quantitas, cui correſpondet $l.a$; & habeatur logarithmus alter, qui ſit ad $l.a$ in ea ratione, quam habet quilibet numerus m ad unitatem; alter iſte logarithmus referri debet ad eandem quantitatem a, elevatam ad eam poteſtatem, quam deſignat numerus m, hoc eſt ad a^m. Sed nihil vetat, pro numero m ſumere quemcumque numerum radicalem. Unde quantitas, cui talis logarithmus correſpondet, eſſe debet quantitas a, elevata ad eam poteſtatem, cujus exponens ſit numerus ille radicalis; adeoque erit una ex iis quantitatibus exponentialibus, de quibus eſt ſermo.

962. Ut, quia $(l.a)\surd 3$ eſt ad $l.a$, ut $\surd 3$ ad 1; non alia erit quantitas, ad quam refertur $(l.a)\surd 3$, quam ipſa quantitas a, elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit $\surd 3$. Similiter, quia $(l.a)\surd^3 5$ eſt ad $l.a$, ut $\surd^3 5$ ad 1; invenietur quantitas, cui correſpondet $(l.a)\surd^3 5$, elevando quantitatem a ad eam poteſtatem, cujus exponens ſit $\surd^3 5$. Atque ita, ſi oporteat invenire quantitatem, cui velut logarithmus correſpondeat $(l.a)\surd^3(3:2)$, elevanda erit quantitas a ad poteſtatem talem, quæ habeat $\surd^3(3:2)$ pro ſuo exponente; quandoquidem $(l.a)\surd^3(3:2)$ eſt ad $l.a$, ut eſt $\surd^3(3:2)$ ad 1.

963. Hæc itaq; eſt geneſis earum quantitatum exponentialium, quæ habent pro ſuis exponentibus

bus numeros radicales. Sed oſtendamus modo naturam, ac indolem iſtarum quantitatum. Et quidem jam vidimus ſupra *, oriri numeros radicales, quum rationes quantitatum incommenſurabilium quæruntur, non jam inter numeros inexprimibiles, in quibus habent ſuas proprias ſedes; ſed inter eos, qui exprimi, enunciarique poſſunt. Inde vero facile erit intelligere, eoſdem numeros radicales non aliud eſſe, quam quotientes, qui ex mutua duorum numerorum inexprimibilium diviſione oriuntur.

* art. 502.

964. Ut ſi ratio, quam habet latus quadrati ad ſuam diagonalem, quærenda eſſet in ſede ſua propria; eam, velut quantitatum incommenſurabilium, per duos numeros inexprimibiles oporteret exhibere. Quare, quum dicimus, eandem illam rationem æqualem eſſe ei, quam habet 1 ad $\sqrt{2}$; etiam ratio iſta, ad naturales ſuos terminos revocata, per duos numeros ineffabiles eſſet exhibenda. Unde, ſi duo iſtiuſmodi numeri vocentur n, & m; fiet, ut n ad m, ita 1 ad $\sqrt{2}$: proindeque erit $\sqrt{2}$ æqualis quotienti, qui oritur, dividendo m per n.

965. Eodem argumento oſtendemus, quemcumque alium numerum radicalem eſſe quotientem, ortum ex mutua diviſione duorum numerorum inexprimibilium. Unde, quid ſibi velint quantitates exponentiales, quæ habent pro ſuis exponentibus numeros radicales; liquet abunde. Plane enim $a^{2:3}$ eſt radix tertia ipſius a^2; & $a^{4:5}$, eſt radix quinta ipſius a^4. Quare ad eundem modum, ſi n, & m referant adhuc numeros inexprimibiles, ex quorum mutua diviſione oritur $\sqrt{2}$; quantitas a, elevata ad $\sqrt{2}$, erit ea radix ipſius

ip-

a^m, quam deſignat numerus n.

966. Generaliter ergo quantitas quæcumque exponentialis, quæ habet pro ſuo exponente numerum aliquem radicalem poſitivum, velut poteſtas quædam imperfecta poſitiva debet haberi; quum, ad inſtar poteſtatum imperfectarum poſitivarum, non aliud ſignificet, quam radicem aliquam extrahendam ex aliqua ejus quantitatis perfecta poteſtate poſitiva. Nec ſane aliud in ea peculiaris occurrit, quam quod ſit numerus inexprimibilis; tum exponens perfectæ poteſtatis poſitivæ, ad quam quantitas elevata reperitur; cum index radicis, quæ ex iſtiuſmodi ejus quantitatis perfecta poteſtate poſitiva erui debet.

967. Fieri autem poteſt, ut exponens quantitatis exponentialis, ſit quidem numerus aliquis radicalis, ſed affectus ſigno negativo. Et quum id contingit, ipſa quantitas exponentialis naturam induet poteſtatis imperfectæ negativæ; adeoque deſignabit quotientem, qui oritur dividendo unitatem per radicem aliquam, extrahendam ex aliqua ejus quantitatis poteſtate perfecta poſitiva. Nam, ſi $\surd 2$ deſignetur, ut prius * per $m:n$; quantitas a, elevata ad $-\surd 2$, idem erit, ac $a^{-m:n}$; adeoque tantundem valebit *, ac $1:a^{m:n}$ ſive etiam $1:\surd^n a^m$. *art. 964. *art. 775.

968. Cæterum, hanc eſſe naturam earum quantitatum exponentialium, quæ habent numeros radicales pro ſuis exponentibus; ſic etiam conjici poteſt. Per ea, quæ ſuperius * oſtenſa ſunt, oriuntur poteſtates imperfectæ, tum poſitivæ, cum negativæ, interpolando ſeriem geometricam poteſtatum perfectarum interjectione aliorum terminorum; & habentur exponentes *art. 713.

alia-

aliarum illarum poteſtatum, interpolando per interjectionem terminorum totidem ſeriem arithmeticam exponentium, qui ad eaſdem perfectas poteſtates referuntur.

969. Jam nihil vetat, utramque ſeriem ſubinde interpolatam concipere, ut multitudo terminorum, inter binos quoſque interjectorum, ſit prorſus inexprimibilis; nec ſubinde adaucta multitudine talium terminorum, earum natura mutabitur. Erunt ergo adhuc poteſtates imperfectæ termini interjecti in ſerie geometrica; & erunt adhuc exponentes earum poteſtatum termini interpoſiti in ſerie arithmetica. Unde, ſi aliqui iſtorum terminorum eſſe poſſint numeri radicales, erunt aliquæ ex iis poteſtatibus quantitates exponentiales, de quibus eſt ſermo.

970. Fieri vero poſſe, ut ſint numeri radicales aliqui ex terminis interjectis in ſerie arithmetica; id liquet abunde. Jam enim multitudo terminorum, qui inter binos quoſque ejus ſeriei concipi debent interjecti, inexprimibilis ponitur. Quare omnino neceſſe eſt, ut quiſque ex terminis interjectis ex mutua duorum numerorum inexprimibilium diviſione oriatur: proindeque, ſi contingat, ut in numeris hiſce ſuam ſedem habeat ratio duarum quantitatum incommenſurabilium; plane fieri debet *, ut ſit radicalis numerus quotiens, qui ex mutua eorum diviſione producitur.

* art. 502.

971. Pergamus modo ad eas quantitates exponentiales, quarum exponentes ſunt; vel ipſæ quantitates, ad quas referuntur, ut a^a, b^b, c^c; vel quantitates aliæ, ab iis plane diverſæ, ut a^c, b^a, c^b. Ac primo quidem geneſis earum

rum eſt plane eadem. Si enim, exiſtente zero logarithmo unitatis, referat $l.a$ logarithmum ipſius a; nihil vetat, concipere logarithmum alium, ad quem $l.a$ ſit, ut unitas ad a, aut c. Plane vero alter iſte logarithmus erit $al.a$, aut $cl.a$. Unde ex theoremate generali, ſuperius * *art.966.*
poſito, fiet a^a, aut a^c, quantitas, cui talis logarithmus correſpondet.

972. Quantum ad naturam talium quantitatum exponentialium, conſiderare prius oportet, quod etſi $l.a$ ſit ad $cl.a$, ut eſt unitas ad c; attamen unitas in iſto caſu non eſt abſtracta, ſeu numerica, ſed ejuſdem plane generis cum ipſa quantitate c. Quum ergo in ſerie numerorum naturalium omnes omnino quantitatum rationes reperiantur; licebit, eandem illam rationem per duos ejus ſeriei numeros exhibere. Quare ſi n, & m ſint duo iſti numeri; erit, ut $l.a$ ad $cl.a$, ita n ad m: proindeque, quum fiat $cl.a$ æqualis $m(l.a):n$, erit a^c idem, ac $a^{m:n}$.

973. Jam fractio numerica $m:n$, pro qualitate ſui numeratoris, ac denominatoris, vel eſt exprimibilis, vel inexprimibilis. In primo caſu erit valor ejus numerus aliquis rationalis, ſive integer, ſive fractus. In ſecundo autem caſu fiet valor ejuſdem numerus aliquis radicalis. Unde conſequens eſt, ut quantitas exponentialis a^c, vel pertineat ad aliquam poteſtatum, quas ſuperius* conſideravimus, vel etiam, ut ſit talis po- *art.714.*
teſtas ipſius a, quæ habeat pro ſuo exponente *715.*
numerum aliquem radicalem.

974. Et ſane, ſi quantitates exponentiales, de quibus eſt quæſtio, quum vel ipſæ, vel eæ, qui-

bus

bus proportione correſpondent, augentur, vel minuuntur, haberent pro ſuis exponentibus eaſdem ſemper, ac invariatas quantitates; eas, per ſubſtitutionem congruentium numerorum, omnino ex calculo eliminare liceret. Sed fieri poteſt, ut in earum incremento, vel decremento ipſi etiam talium quantitatum exponentes mutationem patiantur. Quod ſane quum evenit, non aliter, quam ſub ea forma, illiuſmodi quantitates ad calculum ſunt revocandæ.

975. Ut, ſi fuerint x, & y duæ quantitates ſimul creſcentes, aut decreſcentes; & lex incrementi, aut decrementi talis ſit, ut uni earum x maneat ſemper proportionalis altera y, elevata ad eam poteſtatem, quam deſignat x, vel y: omnino opus eſt, ad exprimendam proportionem iſtam generaliter, ac indefinite, exhibere hanc ipſius y poteſtatem per y^x, vel per y^y; & nonniſi in caſibus ſpecialibus, loco ejus exponentis variabilis, congruentes numeros ſubrogare licebit.

976. Ex eo autem, quod iſtæ quantitates exponentiales uſui ſunt nobis tantum, quum ſui exponentes ſunt variabiles, factum eſt, ut eædem quantitates dicerentur etiam percurrentes. Sed perſpicuum eſt, earum contemplationem in infinitum abire, Ut enim datur quantitas exponentialis x^y; ſic etiam dari poterit ipſius x talis poteſtas, cujus exponens ſit x^y; & rurſus alia, quæ habeat poteſtatem iſtam pro ſuo exponente; atque ita deinceps. Unde, pro qualitate exponentis, poterunt in varios ordines diſtingui.

FINIS LIBRI PRIMI.

IN-

INDEX

:ctionum, Capitum, & Paragraphorum, quæ in primo hoc Libro continentur.

CT. I. *De calculo quantitatum rationalium.*

P.I. *Calculus rationalium ſimplicium.*
. *Additio rationalium ſimplicium.*
I. *Subtractio rationalium ſimplicium.*
II. *Multiplicatio rationalium ſimplicium.*
V. *Diviſio rationalium ſimplicium.*
P.II. *Calculus rationalium compoſitarum.*
Additio rationalium compoſitarum.
I. *Subtractio rationalium compoſitarum.*
II. *Multiplicatio rationalium compoſitarum.*
V. *Diviſio rationalium compoſitarum.*
P.III. *Calculus fractionum rationalium.*
Reductiones fractionum rationalium.
. *Additio fractionum rationalium.*
II. *Subtractio fractionum rationalium.*
. *Multiplicatio fractionum rationalium.*
. *Diviſio fractionum rationalium.*
P.IV. *Rationalium ad poteſtates elevatio.*
Definitio, ordo, ac geneſis poteſtatum.
. *Formatio quadrati, ſeu ſecundæ poteſtatis.*
I. *Formatio cubi, ſeu tertiæ poteſtatis.*
V. *Formatio poteſtatum ſuperiorum.*
. *Fractionum rationalium ad poteſtates elevatio.*

CAP. V. *Extractio radicum ex rationalibus.*
I. Extractio radicis quadratæ.
II. Extractio radicis cubicæ.
III. Extractio aliarum radicum.
IV. Extractio radicum ex fractionibus rationalibus.
V. Geneſis quantitatum incommenſurabilium.
VI. Ratio deſignandi quantitates incommenſurabiles.

SECT. II. *De calculo quantitatum radicalium.*

CAP. I. *Calculus radicalium ſimplicium.*
I. Reductiones radicalium ſimplicium.
II. Additio radicalium ſimplicium.
III. Subtractio radicalium ſimplicium.
IV. Multiplicatio radicalium ſimplicium.
V. Diviſio radicalium ſimplicium.
VI. Radicalium ſimplicium ad poteſtates elevatio.
VII. Extractio radicum ex radicalibus ſimplicibus.

CAP. II. *Calculus radicalium compoſitarum.*
I. Additio radicalium compoſitarum.
II. Subtractio radicalium compoſitarum.
III. Multiplicatio radicalium compoſitarum.
IV. Radicalium compoſitarum ad poteſtates elevatio.
V. Præparatio ad diviſionem radicalium compoſitarum.
VI. Diviſio radicalium compoſitarum.

CAP. III. *Extractio radicum ex binomiis.*
I. Natura binomiorum, unde radices ſunt extrahendæ.

II. Extractio radicis quadratæ ex binomiis.
III. Extractio radicis cubicæ ex binomiis.
IV. Extractio aliarum radicum ex binomiis.
V. Geneſis, & calculus radicalium univerſalium.

CAP.IV. *Natura quantitatum imaginariarum.*
I. Geneſis quantitatum imaginariarum.
II. Natura quantitatum poſitivarum, & negativarum.
III. Exiſtentia numerorum negativorum plenius vindicata.
IV. Quid proprie ſit radicum extractio, quodve criterium proportionis.
V. Impoſſibilitas quantitatum imaginariarum ex proprio fonte deducta.
VI. Quantitatum imaginariarum in ordines diſtributio.

CAP.V. *Calculus quantitatum imaginariarum*
I. Additio, & ſubtractio quantitatum imaginariarum.
II. Multiplicatio, & diviſio quantitatum imaginariarum.
III. Formatio poteſtatum, & extractio radicum ex quantitatibus imaginariis.
IV. Geneſis, & calculus imaginariarum compoſitarum.
V. Impoſſibilitas relativa quantitatum imaginariarum plenius vindicata.

SECT.III. *De calculo ſerierum infinitarum.*

CAP.I. *Diſtinctio quantitatum in indefinite magnas, & parvas.*
I. Notio quantitatis, & per quid diſcreta

differat a continua.
II. Geneſis quantitatis, ejuſque augendæ, vel minuendæ ratio.
III. Quantitatum indefinite parvarum ortus, & natura.
IV, Quantitatum indefinite parvarum in ordines diſtinctio.
V. Theoriæ præcedentis præclara quædam conſectaria,

CAP.II. *Geneſis, & natura ſerierum infinitarum.*
I. Series numerorum naturalium ad examen revocata.
II. Numerorum radicalium, tum item fractionum natura, ac geneſis explicata.
III. Progreſſiones geometricæ decreſcentes ad examen revocatæ.
IV. Geneſis ſerierum infinitarum ex diviſione.
V. Geneſis ſerierum infinitarum ex extractione radicum.
VI. Serierum infinitarum notio generalis.

CAP.III. *Series ſummabiles, quæ figuratis primi generis fiunt.*
I. Numeri Veterum multanguli, tum item figurati Recentiorum.
II. Figuratorum primi generis præclara proprietas demonſtrata.
III. Ratio colligendi, tum figuratos, cum poteſtates numerorum naturalium.
IV. Theorematum præcedentium ad figuras geometricas applicatio.
V. Prima claſſis ſerierum ſummabilium, quæ figuratis primi generis fiunt.
VI. Secunda claſſis ſerierum ſummabilium,

quæ figuratis primi generis fiunt.

CAP. IV. *Series ſummabilium, quæ figuratis aliorum generum fiunt.*

I. *Genitorum, & figuratorum omnium generum proprietas ſingularis.*

II. *Ratio colligendi figuratos cujuſque ordinis in ſingulis generibus.*

III. *Quæ ſint ſeries ſummabiles, quæ figuratis aliorum generum fiunt.*

IV. *Series, quæ fiunt inverſione poteſtatum, & radicum numerorum naturalium.*

V. *Solutio propoſiti paradoxi, & examen theorematis, unde illud derivatur.*

VI. *Enodatio aliorum paradoxorum, quæ ſunt affinia præcedenti.*

SECT. IV. *De generali poteſtatum theoria.*

CAP. I. *Variæ poteſtatum ſpecies explicatæ.*

I. *Natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ.*

II. *Analogia inter progreſſionem arithmeticam, & geometricam.*

III. *Natura poteſtatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ.*

IV. *De poteſtatibus imperfectis, tum poſitivis, cum negativis.*

V. *Geneſis aliarum poteſtatum, & calculus omnium per exponentes.*

CAP. II. *Poteſtatum vulgarium formula generalis.*

I. *Terminorum cujuſque poteſtatis generalis expreſſio.*

II. *Tabulæ, terminorum cujuſque poteſtatis coefficientes exhibentis, conſtitutio.*

III. Coefficientium terminorum cujuſque poteſtatis expreſſio generalis.

IV. Poteſtatum formula generalis exhibetur.

V. Formulæ uſus in conficiendis poteſtatibus oſtenditur.

CAP. III. Uſus formulæ præcedentis in conficiendis ſeriebus infinitis.

I. Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ oriuntur a diviſione.

II. Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ oriuntur ab extractione radicum.

III. Uſus formulæ pro ſeriebus, quæ ex utroque fonte oriuntur.

IV. Series, figuratos numeros continentes, continuatæ, ac interpolatæ.

V. Demonſtratio traditæ interpolationis, & progreſſionum aritbmeticarum proprietas ſingularis.

VI. Generalis vulgarium poteſtatum formulæ extenſio demonſtrata.

CAP. IV. Alia poteſtatum ſpecies enodata.

I. Natura, & proprietates quantitatum logaritbmicarum.

II. Transformationes expreſſionum logarithmicarum ad ſuas regulas revocatæ.

III. Reductio omnium regularum præcedentium ad unam ſolam.

IV. Logarithmorum ſedes geometrica, ubi de curva logarithmica.

V. Geneſis, & natura quantitatum, quæ dicuntur exponentiales.

FINIS INDICIS.

E R R A T A:

Pag. 24.	lin. 2.	$9b^2$	leg.	$6b^2$
35.	2.	denominatorem		numeratorem
	5.	$(bc - bd$		$(bc - bd)$
50.	29.	n^6		n^5
54.	2.	$3a^4b^2d^2$		$3a^4b^2d^3$
67.	12.	a^3b^3		b^3c^3
	14.	a^3b^3		b^3c^3
71.	19.	$2a$		$5a$
74.	3.	$3\sqrt{3}3$		$3\sqrt{3}2$
88.	26.	$\sqrt{a^2cd}$		$\sqrt{ac^2d}$
92.	29.	cubica		quadrata
103.	9.	$\sqrt{a^2b^2cd}$		$\sqrt{3}a^2b^2cd$
114.	22.	radicali		rationali
138.	13.	imparis		paris
169.	2.	-3		-2
229.	17.	$-b^4 : 4a^3$		$-b^4 : 4a^2$
266.	14.	21 . 1760		21 : 1690
288.	16.	10, 15		10, 13
	17.	1, 23		1, 2, 3
338.	31.	$\sqrt{4}a^{12}$		$\sqrt{3}a^{12}$
359.	13.	(1. 2. 2)		(1. 2. 3)
363.	9.	$2p^2$		$1p^2$

M O N I T U M.

HÆc ſunt, Benevole Lector, errata præcipua, quæ priorem hunc librum perluſtrantibus ſeſe nobis obtulerunt. Si alia occurrant, quæ oculos noſtros effugerint, ea judicio tuo corrigenda relinquimus. Vbi autem agitur de conficiendis ſeriebus infinitis ope poteſtatum

for-

formulæ generalis, novimus, ſubſtitutiones valorum d, e, f, g, &c., quas diximus fieri debere ſignis probe obſervatis, nonnullis difficultatem facere. Itaque, ne in eundem locum impingas, monitum te volumus, quod, ſicuti formula illa refertur, vel ad $a + ac$, vel ad $a - ac$; ita partes ejus formulæ afficiuntur omnes ſigno $+$, quum refertur ad $a + ac$; & alternatim ſignis $+$, ac $-$, quum refertur ad $a - ac$. Hinc, quotieſcumque in exemplis ſpecialibus partes illæ non oriuntur ſubinde affectæ; tunc mutationes ſignorum adſcribendæ ſunt ipſis quantitatibus d, e, f, g, &c.: & propterea negative eas accipere oportebit.